数学標準問題集

目次

第 1 章

基礎数学

1.1 数と式の理論

[1] 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b-c)(a-b+c)$

(2) $(2x-y+3z)^2$

(3) $(2x-3)^3$

[2] 因数分解せよ。

(1) $3x^2-14x+15$

(2) $6xy-9x-4y+6$

(3) $8x^3-27y^3$

(4) $x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$

(5) $2x^3+x^2-13x+6$

[3] x^3-2x^2+3x-4 を整式 P で割ったとき、商が x^2+x+6、余りが14であった。P を求めよ。

[4] 整式 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-6$ は $x-3$ で割り切れ、$x+1$ で割ると4余るという。定数 a,b の値を定めよ。

[5] 分数式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+3}{2x^2-3x-2}+\dfrac{6x+1}{4x^2-1}$

(2) $\dfrac{12x-6x}{2x^2-x-1}\div\dfrac{4x^2-4x+1}{x^2-1}$

(3) $\dfrac{\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{2}{x-3}}$

[6] $x:y:z=-2:1:4$ のとき，$\dfrac{(x+y-z)^2}{x^2-+y^2-z^2}$ の値を求めよ。

[7] 次の値を計算せよ。

(1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

[8] $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$

(2) xy

(3) x^2+y^2

(4) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

[9] 次の複素数の計算をせよ。ただし、i は虚数単位である。

(1) $(2-3i)(3+2i)$

(2) $\dfrac{2-3i}{3+2i}$

[10] 複素数 $\alpha = 2-3i$ に対して

(1) 共役複素数を求めよ。

(2) 絶対値を求めよ。

1.2 方程式・不等式

[11] 次の方程式を解け。

(1) $2x^2-x-3=0$

(2) $-2x^2-x+5=0$

(3) $x^2+2x+2=0$

(4) $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

(5) $\begin{cases} x+y+z & =3 \\ 2x+3y-2z & =-1 \\ x+2y+3z & =2 \end{cases}$

(6) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{4}{x-4}$

(7) $1+\sqrt{2x+1}=x$

[12] ２次方程式 $3x^2-6x+1=0$ の2つの解をα, βとするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(3) $(\alpha-\beta)^2$

[13] 横が縦よりも５cm短い長方形の厚紙がある。その四隅から１辺が３cmの正方形を切り取り、残りの四方を折り曲げてふたのない箱を作ると、容積が１０８cm^3 になるという。この厚紙の縦と横の長さを求めよ。

[14] 流れの速さが毎時２kmの川で、３０km離れた上流と下流の町を船で往復するのに８時間かかった。この船の静水での速さを求めよ。

[15] 次の不等式を解け。

(1) $x-2 \geqq -2x+3$

(2) $4x^2-5x-6<0$

(3) $3x^3-5x^2-11x-3<0$

[16] 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x+2>3x-1 \\ -x+2<x-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-16 \leqq 0 \end{cases}$

[17] 次の2次方程式が異なる2つの実数解をもつように定数 k の値の範囲を求めよ。
$x^2+(k-1)x-2k-1=0$

[18] $a<b$ ならば $a<\dfrac{a+2b}{3}<b$ であることを証明せよ。

[19] $a>0,\ b>0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号はどんな場合に成り立つか。

(1) $a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2$

(2) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

[20] 次の式が恒等式となりるように、定数 a,b,c の値を定めよ。

(1) $a(x-1)^2+bx(x-1)+cx=2x^2-6x+7$

(2) $\dfrac{6}{x^2-4x-5}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-5}$

[21] 次の(　)内に、必要、十分、必要十分、どちらでもないのいずれかを書き入れて文章を完成せよ。

(1) $a-2b=1$ は $a=5,\ b=2$ であるための(　　　　)条件である。

(2) a,b が実数であるとき、$a+b>0$ かつ $ab>0$は$a>0$ かつ $b>0$ であるための(　　　　)条件である。

(3) $x<-2$ は $x^2>4$ であるための(　　　　)条件である。

(4) $x=7$ は $\sqrt{x+2}=4-x$ であるための(　　　　)条件である。

[22] a,b が整数のとき、

(1)「積 ab が偶数なら a または b は偶数である」の対偶をいえ。

(2) 対偶を利用して、「積 ab が偶数なら a または b は偶数である」を証明せよ。

1.3　関数とグラフ

[23] $y=x^2-3x-4$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したグラフは $y=$ (　　　　　　)で、y 軸に関して対称に移動したグラフは $y=$(　　　　　　)である。

[24] グラフが次の条件を満たすような2次関数の方程式を求めよ。

(1) 3点 $(0,4),(1,0),(-3,0)$ を通る

(2) 軸の方程式が $x=5$ で、2点 $(2,5),(6,1)$ を通る

(3) x 軸と2点 $(1,0),(4,0)$ で交わり、y 軸と $(0,-4)$ で交わる

[25] 次の関数について、(　　)内の定義域における最大値・最小値を求めよ。

(1) $y=-x^2+3x \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y=-x^2+2x+1 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$

[26] 幅２２cmの長いトタン板の両端を同じ長さだけ直角に折り曲げて樋を作るとき、断面積を最大になるようにしたい。どのように折り曲げればよいか。また、そのときの断面積を求めよ。

[27] 放物線 $y=x^2-4x+2$ と直線 $y=-2x+k$ が２点で交わるような k の値の範囲を求めよ。

[28] 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}+3$

(2) $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$

(3) $y=\sqrt{2x-4}$

(4) $y=\sqrt{2-x}+1$

[29] 次の空欄に適当な式または数を入れよ。

(1) $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ のグラフは関数 $y=$（　　　）のグラフを x 軸方向に（　　　）、y 軸方向に（　　　）平行移動したもので、漸近線の方程式は $x=$（　　）、y=（　　）である。

(2) 関数 $y=\sqrt{2-x}$ のグラフは関数 $y=$（　　　）のグラフを x 軸方向に（　　　）平行移動したものである。

[30] $x=1$ と $y=3$ を漸近線とし、点 $(-1,2)$ を通る直角双曲線の方程式を求めよ。

[31] $y=\sqrt{kx}$ のグラフを x 軸方向に２、y 軸方向に－３平行移動したら、x 軸と５で交わった。定数 k の値を求めよ。

[32] 次の関数について、偶関数のものには○、奇関数のもには△、どちらでもないものには×を括弧内にかけ。

(1) $y=x^4-2x+5$ (　　)

(2) $y=x(3-x^2)$ (　　)

(3) $y=x\sin x$ (　　)

(4) $y=\frac{x}{x^2+1}$ (　　)

[33] 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=-\frac{1}{2}x+3$

(2) $y=x^2-1 \quad (x \geqq 0)$

1.4　図形と式

[34] 三角形の外心、内心、重心の定義と作図法を述べよ。

[35] 2点 A$(-2,5)$, B$(6,1)$ について以下に答えよ. (各3点)

(1) 2点 A, B の距離を求めよ.

(2) 2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ.

(3) 点 A と $(-2,0)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) 線分 AD を2:1に内分する点がBのとき，点Dを求めよ.

(5) 原点を通り線分 AB に平行な直線と垂直な直線の方程式を求めよ.

(6) 点 $\mathrm{C}(-1,-3)$ に対し、$\Delta\mathrm{ABC}$ の重心を求めよ。

[36] 次の円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(2,1)$ で点 $(4,4)$ を通る円

(2) 2点 $\mathrm{A}(-1,2),\mathrm{B}(3,0)$ を直径の両端に持つ円

(3) 3点 $\mathrm{A}(-1,2),\mathrm{B}(3,0),\mathrm{C}(1,-2)$ を通る円

[37] 円 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ の中心と半径を求めて概形を描け.

[38] 次の曲線の概形を描け。(漸近線のあるものはそれを含む)

(1) $x^2+9y^2=36$

(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(3) $x=8y^2$

[39] 2次曲線 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=2x+3$ の共有点を調べよ.

[40] 曲線 $y=x^2+8x+a$ と直線 $y=2x-5$ が接するとき，定数 a の値を定め接点の座標を求めよ.

[41] 連立不等式 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq x+y \end{cases}$ で表される領域を図示せよ.

[42] x,y が $\begin{cases} 3x+y \leqq 6 \\ x+2y \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \end{cases}$ をみたすとき $2x+y$ の最大値・最小値を求めよ。

1.5 三角関数

[43] 次の値を求めよ。

(1) $\sin 60^\circ$

(2) $\tan 30^\circ$

(3) $\cos 135^\circ$

(4) $\sin 150^\circ$

(5) $\cos 180^\circ$

[44] α は鈍角で，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ を求めよ.

[45] $\cos 130^\circ$ と同じ値の三角比を次の中から選べ．また，その理由となる式または図を記せ.

(1) $-\sin 40^\circ$

(2) $\sin 40^\circ$

(3) $\cos 40^\circ$

(4) $\cos 50^\circ$

(5) $-\sin 50^\circ$

[46] $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ を満たす角 α を $0 \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ の範囲で求めよ.

[47] 等式 $\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ を証明せよ.

[48] ΔABC について次の値を求めよ.

(1) $a = 10,\ B = 60^\circ,\ C = 75^\circ$ のとき，b の長さと ΔABC の外接円の半径.

(2) $a = 5,\ b = 10,\ C = 120^\circ$ のとき，c の長さ.

(3) $a = 4,\ b = 5,\ \sin C = \frac{1}{3}$ のとき，△ABCの面積

(4) $a = 2,\ b = \sqrt{2},\ c = \sqrt{3} + 1$ のとき，角 C の大きさ.

[49] 半径が10，中心角が $\frac{\pi}{5}$ である扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ.

[50] 次の角を図示せよ。

(1) 210°

(2) -690°

(3) $\dfrac{19}{4}\pi$

(4) $-\dfrac{23}{6}\pi$

[51] $\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right),\ \cos\dfrac{17}{4}\pi,\ \tan\dfrac{8}{3}\pi,\ \tan\left(-\dfrac{7}{2}\pi\right)$ の値を求めよ.

[52] θ は第3象限の角で，$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta,\ \tan\theta$ を求めよ.

[53] * $\dfrac{\left\{1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)\right\}\left\{1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right\}}{\sin(\pi - \theta)}$ を簡単にせよ。

[54] 次の三角関数の周期をそれぞれ求め，グラフをかけ.

(1) $y = 3\sin 2x$

(2) $y = \tan\frac{x}{2}$

(3) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$

[55] 三角方程式 $\sin x = -\frac{1}{2}$ および三角不等式 $\sin x > -\frac{1}{2}$を$0 < x < 2\pi$ の範囲で解け.

[56] 三角関数の加法定理を述べよ。

[57] α は第2象限の角，β は第3象限の角とし，$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\ \sin\beta = -\frac{1}{3}$ とするとき，以下を計算せよ.

(1) $\sin(\alpha - \beta)$

(2) $\cos 2\beta$

(3) $\sin\frac{\beta}{2}$

[58] *次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sin 2\theta - \cos\theta}{\cos 2\theta + \sin\theta - 1}$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

[59] $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ を合成せよ.

1.6 指数対数

[60] 64の3乗根と4乗根を求めよ.

[61] 次の式を簡単にせよ.

(1) $9^2 \times 27 \div 9^3 \div \frac{1}{3}$

(2) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[6]{4} - \sqrt[9]{8}$

(3) $(\sqrt[3]{2} \times 2 \div \sqrt[4]{2^3})^{-6}$

[62] 指数関数 $y = 2^{x+1}$, $y = 3^{-x}$ のグラフをかけ.

[63] $\sqrt{3}$, 9^{-1}, $3^{0.3}$, $\sqrt[3]{9}$ を大きい順に並べよ。

[64] 指数方程式 $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$, 指数不等式 $5^x < \frac{1}{\sqrt{5}}$ を解け.

[65] 次の式を計算せよ.

(1) $\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{3}{2}$

(2) $\frac{1}{2}\log_3 5 - \log_3 \frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $(\log_2 3) \times (\log_9 2)$

[66] 対数関数 $y = \log_3(x-1)$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフをかけ.

[67] $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{2}} 0.25$, -3 を大きい順に並べよ。

[68] 対数方程式 $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$, 対数不等式$-2 \leqq \log_2(2x-1)$ を解け.

[69] * $\log_{10} 2 \doteqdot 0.301$ を使って次の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 5$

(2) $\log_2 5$

(3) 2^{25} の桁数

第 2 章

微分法

2.1　関数の極限と導関数

[1]　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{5-2x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}-x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{h}(\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3})$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

[2]　*次の等式が成り立つように定数 a、b の値を定めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=1$

[3]　次の関数 $y=f(x)$ について、

(A)$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$

および

(B)定義式を用いて、$x=a$ における変化率 $f'(a)$

を求めよ。

(1) $f(x)=2x+3$ (2) $f(x)=3x^2$ (3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ (4) $f(x)=\sqrt{x+3}$

[4]　微分公式を用いて、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\cos 5x$

(2) $y=\cos^3 5x$

(3) $y=\log|3-5x|$

(4) $y = e^{-5x}$

(5) $y = e^{-2t}\sin(\dfrac{\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{4})$

(6) $y = \sin\dfrac{\pi - 3x}{4}$

(7) $y = 2x\cos 2x - \sin 2x$

(8) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

(9) $y = \log\sqrt{2x - 1}$

(10) $y = \log|\tan x|$

(11) $y = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{x} + 1}$

(12) $y = 2^{-x}$

2.2 微分法の応用

[1] 次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフの概形をかけ。

(1) $y = -2x^2 + 3x + 1$

(2) $y = x^3 - 3x + 1$

(3) $y = x^4 - 4x + 3$

(4) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(5) $y = \dfrac{4x + 3}{x^2 + 1}$

(6) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

(7) $y = x + 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

[2] 次の関数の（　）内の区間における最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = -2x^2 + 3x + 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$

(2) $y = x^3 - 12x + 10 \quad (-3 \leq x \leq 4)$

(3) $y = x^4 - 3x^2 + 2 \quad (-1 \leq x \leq 2)$

(4) $y = x + \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 2)$

[3] 次の曲線上の、（　）内の値に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = x^3 - x^2 \ (x = 2)$

(2) $y = 3\sqrt[3]{x^2} \quad (x = -8)$

(3) $x = 1 + t^2, \quad y = 1 - 2t \ (t = -1)$

(4) $x = 4\sin 2t, \quad y = 2\sin 3t \quad (t = \dfrac{\pi}{12})$

(5) $x = \log t, \quad y = y^2 - t \quad (t = 2)$

[4] 曲線 $y = x^3 - x^2$ の上にない点 $(1, 8)$ から引いた接線の方程式を以下の手順で求めよ。
(i) 接線と曲線との接点の x 座標を t として、接線の方程式を t を用いて示せ。
(ii) (i)で求めた接線が点 $(1, 8)$ を通るように t の値を定め、そのときの接線の方程式を求めよ。

[5] 地上 30m の高さから、毎秒 25m の速さで真上に投げた小石の t 秒後地上からの高さ hm が、$h = 30 + 25t - 5t^2$ で与えられている。次のものを求めよ。

(1) 2秒後、3秒後の小石の速度

(2) 小石が地上に落下したときの速度

(3) 小石が最高点に達するときの高さ

[6] 直線軌道上を走るある電車は、ブレーキをかけてから t 秒間に走る距離 s[m] が、$s = 27t - 0.45t^2$で与えられる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ブレーキをかけてから、10秒後の位置と速度を求めよ。

(2) ブレーキをかけてから停止するまでの時間と、その間の走行距離を求めよ。

[7] x 軸上の原点から出発した点Pの t 秒後の位置が、$x = 3t^2 - t^3$(m) で与えられている。次のものを求めよ。

(1) 1秒後、4秒後の点Pの位置 x、速度 v、加速度 α

(2) 出発してから、点Pが運動の向きを初めて変える t の値（Hint:(t, x) の増減表またはグラフを利用）

(3) (2)で求めた t における加速度 α

(4) 速度 v が最大となる t の値と、そのときの点Pの位置 x（Hint:(t, v) の増減表またはグラフを利用）

[8] 関数$f(x) = ax^2 + bx + c$において、$f(0) = -2$、$f'(1) = 5$、$f'(2) = 9$ のとき、定数 a、b を求めよ。

[9] *関数$f(x) = x^2 - 2x$について、

(1) $x = -1$ から $x = 4$ までの平均変化率を求めよ。

(2) $x = c$ における微分係数 $f'(c)$ が (1) で求めた平均変化率に等しいとき、c の値を求めよ。

[10] 次の式について、y を x の関数と考え、導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y^2 = 3x$

(2) $x^2 + y^2 = 5$

(3) $x^2 - 3xy + y^2 = 1$

[11] 次の媒介変数表示された関数の $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x = t^2, \quad y = t^3$

(2) $x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t$

(3) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$

[12] 対数微分法により、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-1)^2}$

(2) $y = x^x$

[13] A、B、k を定数とするとき、関数 $y = A\cos kx \ + \ B\sin kx$ は等式 $y'' = -k^2 y$ を満たすことを証明せよ。

[14] 1辺の長さが $18[cm]$ の正方形の厚紙の４隅から同じ大きさの正方形を切り取り、残りの部分を折り曲げてふたのない箱を作る。このとき、容積をできるだけ大きくするには、どのような正方形を切り取ればよいか。

[15] 半径 $30cm$ の球に内接する直円錐のうちで、体積が最大になるものを求めたい。

(1) 直円錐の高さを h とし、体積 V を h の式で表せ。

(2) 体積が最大になるときの高さと体積を求めよ。

[16] 容積が $250\pi cm^3$ の直円柱上のブリキ缶（ドラム缶のような底とふたのあるもの）を作りたい。表面積が最小になるようにするには、底面の半径 r と高さ h をいくらにすればよいか。

(1) 表面積を Scm^2 として、S を r の式で表せ。

(2) S が最小になる r の値を求め、h を求めよ。

[17] 水面上 $30m$ の高さの岸壁から $58m$ の長さのロープで毎秒 $4m$ の速さでボートを岸に引き寄せている。

(1) t 秒後のボートと岸壁の距離を x とするとき、x を t の式で表せ。

(2) ２秒後のボートの速さを求めよ。

第 3 章

積分法

3.1 積分の計算

[1] 次の不定積分を計算せよ

(1) $\int (1-\cos^4 x)\sin x dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(3) $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$

(4) $\int x^2 e^{x^3} dx$

(5) $\int \sqrt{2x+1}dx$

(6) $\int x\sin 2x dx$

(7) $\int xe^{2x}dx$

(8) $\int \frac{2}{x^2-1}dx$

(9) $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$

(10) $\int \sqrt{1+x-x^2}dx$

[2] 次の定積分を計算せよ

(1) $\int_{-1}^{1}(x-1)dx$

(2) $\int_{-1}^{1}(x-1)^4+(x+1)^4 dx$

(3) $\int_{-1}^{2}(x+1)^2 dx$

(4) $\int_{1}^{2}\sqrt{2x}dx$

(5) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}dx$

(6) $\int_{1}^{2}\sqrt[3]{x^2}dx$

(7) $\int_{1}^{2}\frac{(x+2)^2}{x}dx$

(8) $\int_{1}^{2}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$

(9) $\int_{0}^{1}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$

(10) $\int_{0}^{1}\sqrt{2x+1}dx$

(11) $\int_0^1 xe^x dx$

[3] 定積分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ を　$x=\sin\theta$ と置換して計算せよ。

3.2 積分の応用

［極座標］

[4] 直交座標 (x,y) で次のようにあらわされる点の極座標 (r,θ) を求めよ。

(1) $(-1,\sqrt{3})$

(2) $(3,-3)$

(3) $(0,-2)$

[5] 極座標 (r,θ) で次のようにあらわされる点を座標平面に図示せよ。

(1) $\left(2,\frac{7}{6}\pi\right)$

(2) $\left(\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi\right)$

[6] 極座標で次のようにあらわされる曲線を図示せよ。

(1) $r=2\theta$

(2) $r=2\sin\theta$

[7] 次の広義積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$

[8] 次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y=x^2-x$ と x 軸と直線 $x=2$ で囲まれる図形

(2) 2曲線 $y=\sin x, y=\cos x$ と y 軸で囲まれる図形

(3) 曲線 $y=x^3+x^2-1$ と直線 $y=2x-1$ で囲まれる図形

(4) 媒介変数 t によってあらわされる曲線 $x=t+\dfrac{1}{t},\ y=t-\dfrac{1}{t}$　$(1\leqq t\leqq 2)$ と x 軸と直線 $x=\frac{5}{2}$ で囲まれる図形（注：曲線の図は示しておく）

(5) 極形式で $r=\cos\theta+2$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ であらわされる曲線の囲む図形（注：曲線の図は示しておく）

(6) 曲線 $y=xe^{-x}$ と x 軸の正の部分の囲む図形

(7) 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面

[9] 1辺の長さが 1 の正方形を底辺にし、高さが 2 の四角錐の体積を積分を使って求めよ。

[10] 次の回転体の体積を求めよ。

(1) 曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ をx 軸のまわりに回転したもの

(2) 楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ をx 軸のまわりと y 軸のまわりにそれぞれ回転したもの

(3) 媒介変数 t によってあらわされる曲線 $x = \sin t, y = \sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ をx 軸のまわりに回転したもの（注：曲線の図は示しておく）

[11] 次の曲線の長さを求めよ。

(1) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(2) 媒介変数 t によってあらわされる曲線 $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$

(3) 極形式で $r = e^{-\theta} \quad (0 \leqq \theta < \infty)$ とあらわされる曲線

第 4 章

微積分の応用

4.1 級数

[1] 次の数列・級数の収束・発散を調べ、収束するときは極限（級数については和）を求めよ。また、発散のときはその理由を書け。

(1) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n}{(2n-1)(n+2)}$

(2) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

(3) $a_n = \dfrac{\sin n\theta}{n}$

(4) $a_n = \cos \dfrac{n}{n+1}\pi$

(5) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(7) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+2)} + \cdots$

[2] 循環小数 $2.1313131\cdots$ を分数になおせ。

[3] $f(x) = e^x$ について

(1) マクローリンの定理によって x の 3 次式で近似せよ。

(2) (1)の結果を使って、e の近似値を求めよ。またこのときの誤差の限界も求めよ。

[4] $f(x) = \sqrt{4+x}$ を（マクローリンの定理によって）x の 3 次式で近似せよ

[5] 次の関数をマクローリン展開せよ。

(1) $\sin x + \cos x$

(2) $\dfrac{1}{1-x}$

(3) $\sqrt{1+2x}$

4.2 偏微分

[6] 次の２変数関数のグラフを描け。

(1) $z = x^2 - y^2$
(2) $z = x^2 + y^2$
(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

[7] 次の関数を偏微分せよ。また、() 内の点での偏微分係数を求めよ。

(1) $z = x^4 - x^3y + 4x^2y^2 + xy \quad ((x, y) = (1, 2))$
(2) $z = e^{-x} \sin y \quad ((x, y) = (2, 0))$
(3) $z = \dfrac{2x + y}{x - 3y} \quad ((x, y) = (1, 1))$

[8] 曲面 $z = \dfrac{1}{xy}$ の点 $(1, 1, 1)$ での接平面を求めよ。

[9] 次のものを求めよ。

(1) $f(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ のとき f_{xx}とf_{yy}
(2) $z = \dfrac{x}{y}$のとき全微分dz
(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x = e^t + e^{-t}, y = e^t - e^{-t}$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$
(4) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$
(5) $z = \log(x^2 + y^2)$ のとき $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
(6) $z = e^{x^2 - y^2},\ x = at, y = bt \quad (a, b$ は定数$)$ のとき $\dfrac{dz}{dt}, \dfrac{d^2 z}{dt^2}$

[10] $z = f(x, y),\ x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta$ とするとき、$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = r\dfrac{\partial z}{\partial r}$ が成り立つことを証明せよ。

[11] *次の関数にマクローリンの定理を適用し、x, y の３次式で近似せよ。

(1) $z = e^{x^2 - y^2}$
(2) $z = \sin(x + y)\cos(x - y)$

[12] $z = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ。

[13] x の関数 y が、関係式 $y = 1 + xe^y$ によって与えられているとき、$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

[14] $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ によって z が x, y の関数になっているとき、z_x, z_y を求めよ。

[15] 曲面 $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ での接平面の方程式を求めよ。

[16] $xyz = 8$ のとき、$xy + yz + zx$ の最小値を求めよ。

[17] *α をパラメータとする曲線群 $C_\alpha : \frac{x^2}{\alpha^2} + \alpha^2 y^2 = 1$ の包絡線の方程式を求めよ。

[18] 半径１の球に内接する直円柱で体積が最大のものを求めよ。

[19] 面積一定のひし形のうちで、周の長さが最小なものを求めよ。

4.3 重積分

[20] 次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(2x+y)dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq y \leqq \pi$

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq 2x$

(4) $\displaystyle\iint_D (x-y)dxdy \quad D$は3点$\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(0,1), \mathrm{C}(-1,0)$を頂点とする三角形の内部

[21] 次の累次積分の積分順序を変更せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{2y} f(x,y)dx \right\} dy$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy \right\} dx$

[22] 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{1-y}^{1} e^{x^2}dx \right\} dy$ の積分順序を変更して、その値を求めよ。

[23] 極座標に変換して次の 2 重積分を求めよ。

$\displaystyle\iint_D xydxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 1, 0 \leqq y$

[24] 球 $x^2+y^2+z^2=3$ の内部で $x^2+y^2 \leqq 1$ の部分の体積を求めよ。

[25] 円柱 $x^2+y^2=1$ をxy 平面と平面 $z=x+1$ で切り取った図形の体積

[26] 球面 $x^2+y^2+z^2=4$ の $x^2+y^2 \leqq 1$ の部分と $x^2+y^2 \leqq 2x$ の部分の面積

4.4 微分方程式

[27] (1) 曲線群 $F: y=(x-C)^2$（Cは任意定数） が共通にみたす微分方程式を求めよ。

(2) 関数 $y=0$ は（1）で求めた微分方程式の特異解であることを示せ。

[28] 容積 $V[l]$ の容器に $N[g]$ の食塩を溶かした食塩水がいっぱいに入っている。その容器に、純水が毎秒 $v[l]$ ずつゆっくり注ぎ込まれ、完全にかき混ぜられた食塩水が同じ量だけ別の口から流れ出すとする。純水を注ぎはじめてから t 秒後に容器の中に残っている食塩の量を $n=n(t)[g]$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 純水を注ぎはじめてから t 秒後には、毎秒何 g の割合いで食塩が流れ出すか、V, n, v であらわせ。

(2) t の関数 $n(t)$ のみたす微分方程式を作れ。

(3) $n(t)$ を求めよ。

[29] 次の（1階）微分方程式の一般解および () 内の初期条件をみたす解を求めよ。

(1) $x^2y'+y=0 \quad (x=1のときy=1)$

(2) $(1+x^2)y'+2x(1+y)=0 \quad (x=0のときy=0)$

(3) * $x^2-y^2+2xyy'=0 \quad (x=1のときy=0)$ [同次形]

(4) $y' + y = \cos x \quad (x = 0のとき y = 0)$

(5) $xy' - 2y = 1 \quad (x = 1のとき y = 1)$

[30] *微分方程式 $y - x^2 = (y^2 - x)y'$ は完全形であることを確認して、これを解け。

[31] 次の（同次形）２階線形微分方程式の一般解および () 内の初期条件をみたす解を求めよ。

(1) $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (x = 0のとき y = 0, y' = 1)$

(2) $y'' - 2y' + 2y = 0 \quad (x = 0のとき y = 2, y' = 1)$

[32] 次の(非同次形）２階線形微分方程式の一般解および () 内の初期条件をみたす解を求めよ。

(1) $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1 \quad (x = 0のとき y = 1, y' = 1)$

(2) $y'' - 4y + 4y = e^{2x} \quad (x = 0のとき y = 1, y' = 1)$

[33] *次の（２階）微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $xy'' = y' - 1$

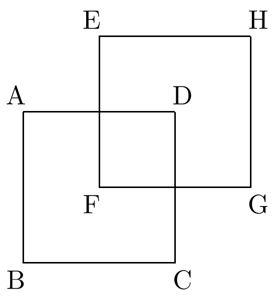
(2) $(1 - y)y'' + (y')^2 = 0$

第 5 章

行列と行列式

5.1　ベクトル

[1]　図は，平行移動すると重なる 2 つの正方形である．

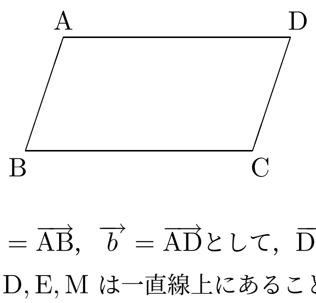


(1) 始点と終点が正方形の頂点であるベクトルの中で，次のベクトルに等しいものを書け．$\overrightarrow{\mathrm{EB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{e}$とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ．(Hint:ベクトルの和・差を用いる)

$$\overrightarrow{\mathrm{EG}},\ \overrightarrow{\mathrm{DG}},\ \overrightarrow{\mathrm{BG}},\ \overrightarrow{\mathrm{AG}},\ \overrightarrow{\mathrm{FH}},\ \overrightarrow{\mathrm{CF}},\ \overrightarrow{\mathrm{CH}},\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

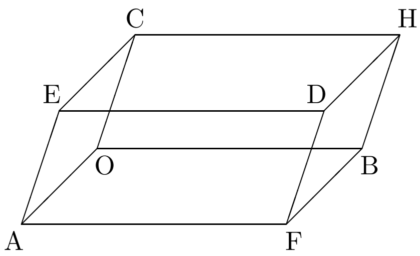
[2]　平行四辺形 ABCD の辺ABの中点をMとする．また，対角線 AC 上に点 E を $\mathrm{CE} = 2\mathrm{AE}$ であるようにとる．このとき，次の問に答えよ．



(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$として，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ．

(2) 点 $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{M}$ は一直線上にあることを証明せよ．

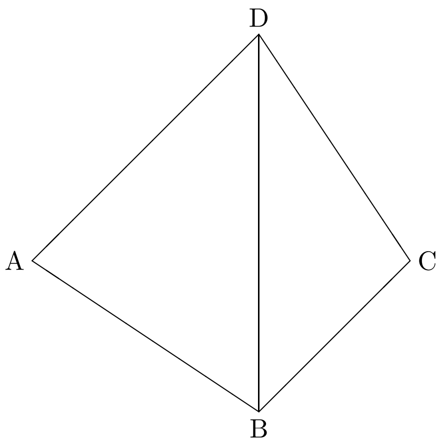
[3]　図の平行六面体において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$とするとき，次の問に答えよ．



(1) ΔEFH の重心をGとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$を用いて表せ.

(2) 線分 OD は平面 EFH とにより $2:1$ に内分されることを証明せよ.

[4] 四面体ABCDにおいて，点 $\mathrm{A,B,C,D}$ の位置ベクトルをそれぞれ$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{d}$とおくとき，次の問に答えよ.



(1) ΔABC の重心 G の位置ベクトルを求めよ.

(2) 線分 DG を $3:1$ に内分する点 P の位置ベクトルを求めよ.

[5] ΔABC の頂点 $\mathrm{A,B,C}$ の位置ベクトルをそれぞれ$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$とする．AB を $2:3$ に内分する点を P，BC を $3:1$ に内分する点を Q，CA を $1:2$ に内分する点を R とする.

(1) $\mathrm{P,Q,R}$ の位置ベクトルを$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$を$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$を用いて表せ.

(3) $\mathrm{P,Q,R}$ は同一直線上にあることを証明せよ.

[6] 4点 $\mathrm{A}(2,-1,0)$，$\mathrm{B}(1,0,1)$，$\mathrm{C}(-1,1,-3)$，$\mathrm{D}(-3,2,5)$ は同一直線上にあるかを調べよ.

[7] 点 $\mathrm{A}(4,2,-3)$ に関して，点 $\mathrm{P}(2,-3,1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ.

[8] 2点 $\mathrm{P}(1,2,-2)$，$\mathrm{Q}(3,4,2)$ を結ぶ線分と xy 平面との交点の座標を求めよ.

[9] 次の各組のベクトルの内積を求めよ．また各組のベクトルのなす角を求めよ.

(1) $\overrightarrow{a}=(2,2\sqrt{2},6)$，$\overrightarrow{b}=(1,\sqrt{2},1)$

(2) $\overrightarrow{a}=(1,1,-4)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2,2)$

[10] $\overrightarrow{a}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,-3,4)$，$\overrightarrow{c}=(-2,3,1)$のとき，次の値を求めよ.

(1) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$

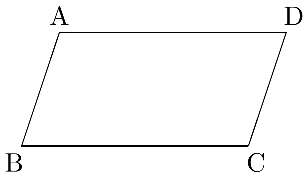
(2) $(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$

[11] $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(-1,1)$, $\mathrm{C}(2,3)$のとき，次のものを求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$に垂直な単位ベクトル

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と$45^\circ$をなす大きさ$\sqrt{5}$のベクトル

[12] 図の平行四辺形において，$\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{BC}=3$, $\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$のとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$を求めよ．（Hint : $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{y}$ として考えよ）



[13] 4点 $\mathrm{A}(1,-2,6)$, $\mathrm{B}(0,-4,0)$, $\mathrm{C}(5,-1,0)$, $\mathrm{D}(0,2,0)$に対して，線分 AB の中点を P，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を Q，線分 CD を 5 : 1 に内分する点を R とする．

(1) 点 $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ の座標を求めよ．

(2) $\Delta\mathrm{BCD}$, $\Delta\mathrm{PQR}$ の重心をそれぞれ E,F とするとき，E,F の座標を求めよ．

(3) 3点 $\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{F}$ は同一直線上にあることを証明せよ．

[14] $|\overrightarrow{a}|=2$, $|\overrightarrow{b}|=3$で，$\overrightarrow{a}$と$\overrightarrow{b}$のなす角が$\frac{2}{3}\pi$のとき，$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$の大きさを求めよ．

[15] 次のものを求めよ．

(1) 直線 $x-2=\dfrac{y-3}{2}=4-z$ が $zx-$ 平面と交わる点の座標

(2) 2直線 $x=3+kt,\ y=2t,\ z=1-2t$ と $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{4-z}{3}$ が垂直となる k の値

(3) 点 $\mathrm{A}(4,-3,2)$ を通り，$yz-$ 平面に平行な平面の方程式

(4) 3点 $\mathrm{A}(1,-1,1)$, $\mathrm{B}(-1,0,2)$, $\mathrm{C}(-2,4,1)$ を通る平面の方程式

[16] 次のものを求めよ．

(1) 直線 $2(x+1)=y-2=3(z+1)$ と平面 $2x-y-3z=5$ との交点の座標

(2) 点 $(-2,1,3)$ を通り，直線 $x-1=y=\dfrac{z+2}{-3}$ を含む平面の方程式

[17] 次のものを求めよ．

(1) 点 $(-1,3,2)$ を通り，2平面 $\alpha:3x+2y-z=1$, $\beta:4x-3y-z=4$ の両方に平行な直線の方程式

(2) 点 $\mathrm{A}(2,3,1)$から直線 $x-2=\dfrac{y+5}{2}=3-z$ に垂線をひき交点を H とすときの H の座標

(3) 点　$\mathrm{A}(1,-1,3)$ から平面 $2x+y+4z+8=0$ に垂線をひき交点を H とするとき H の座標

[18] 次のものを求めよ．

(1) 球 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ 上の点 $(2,4,5)$ における接平面の方程式

(2) 点 $(1,-2,1)$ を中心とし，平面 $3x-2y+6z=10$ に接する球の方程式

(3) 球面 $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=25$ と平面 $x-4y+z=1$ との交線円の半径

(4) 球 $x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ と平面 $2x+y+2z=12$ との交線円の中心の座標

[19] 次の各組のベクトルは1次独立であるか.

(1) $\overrightarrow{a} = (-3, 4, -2)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1, -3)$, $\overrightarrow{c} = (2, 0, -4)$

(2) $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$, ただし基本ベクトル $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$

5.2 行列

[20] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、次のものを求めよ。

(1) 積 AB

(2) $2X - Y = A,\ X + Y = B$ をみたす行列 X, Y

(3) $2(B - X) = {}^t A + X$ をみたす行列 X

(4) $X(2E - X) = E$ をみたす行列 X

(5) A^3

[21] $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、$\frac{2}{3}(A + B) - \frac{1}{6}(A - 2B)$ を求めよ。

[22] $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $(X - A) + (2X + 3B) = 2C$ をみたす行列 X を求めよ。

(2) $3{}^tA - 2{}^tB$ を求めよ。

[23] 次のものを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ をみたす行列 X

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ をみたす行列 X

[24] * $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき次の問いに答えよ。

(1) $A = PBP^{-1}$ を求めよ。

(2) B^{11} を求めよ。

(3) $A^{11} = PB^{11}P^{-1}$ が成り立つことを証明せよ。

(4) A^{11} を求めよ。

[25] 次の連立一次方程式に対し、係数行列 A と拡大係数行列 $\tilde{A}$ の階数を求め、さらにこの方程式を解け。

(1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & + & 2t & = & -3 \\ -x & - & 3y & + & z & + & t & = & 7 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & + & 6t & = & 2 \end{array}\right.$

(2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & + & 2t & = & -3 \\ -x & - & 3y & + & z & + & t & = & 7 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & + & 6t & = & 1 \end{array}\right.$

(3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & + & 2t & = & -3 \\ -x & - & 3y & + & z & + & t & = & 7 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & + & t & = & 2 \end{array}\right.$

[26] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の逆行列を求めよ。

(2) $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をみたす 3×3 行列 X を求めよ。

5.3 行列式

[27] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) サラスの方法によって $|A|$ を求めよ。

(2) A の逆行列を求めよ。

(3) $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をみたす 3×3 行列 X を求めよ。

[28] 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ を、定義に従って（つまり定義式 $|A| = \Sigma \mathcal{E}_P a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ によって）求めよ。

[29] $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{42} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{42} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ を証明せよ。

[30] n 次正方行列 A と、正則な n 次正方行列 P に対して、$|P^{-1}AP| = |A|$ を証明せよ。

[31] $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 3 行について展開することにより $|A|$ を求めよ。

(2) A の逆行列の $(2,3)$ 成分と $(3,3)$ 成分を求めよ。

(3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & + & t & = & 2 \\ & & 3y & + & z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & & & - & t & = & 1 \end{array}\right.$

が成り立つとき、クラメルの公式を用いて z を求めよ。

[32] 連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (a-1)x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & (a-4)y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & + & az & = & 0 \end{array}\right.$$

が $x=y=z=0$ 以外の解を持つような定数 a の値を求めよ。

[33] 平面の 3 点 $(1,0),\ (3,4),\ (-1,1)$ のつくる 3 角形の面積を求めよ。

[34] *座標空間内の点 $\mathrm{O}(0,0,0),\ \mathrm{A}(1,-1,0),\ \mathrm{B}(1,0,-1)$ を考える。A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ として、次の問に答えよ。

(1) $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ の両方と直交するベクトル $\mathbf{c}$ を 1 つ求めよ。(単位ベクトルでなくてよい)

(2) $\Delta\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ。

5.4 線形変換と行列

[35] 平面ベクトルの一次変換 f が、$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をみたすとき、f をあらわす行列を求めよ。

[36] 原点中心の θ 回転を f_θ 、直線 $y=x$ に関する対称変換を g とする。

(1) $f_{\frac{\pi}{4}},\ f_{-\frac{\pi}{4}},\ g$ を表す行列を求めよ。

(2) $f_{-\frac{\pi}{4}} \circ g \circ f_{\frac{\pi}{4}}$ はどのような一次変換になるか。

[37] 次の行列に対応する一次変換で直線 $y=3x-1$ はどのような図形に移るか。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

[38] (1) 平面ベクトルを原点中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させる一次変換をあらわす行列を求めよ。

(2) 曲線 $x^2-y^2=1$ をを原点中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させた曲線の方程式を求めよ。

[39] $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列になるような定数 $b,c,d \quad (b>0,\ c>0)$ を求めよ。

5.5 固有値と対角化

[40] $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、A の固有値を求め、直交対角化せよ。(つまり、${}^tPAP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ)

[41] $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) B の固有値・固有ベクトルを求め、対角化せよ。

(2) $B^n \quad (n = 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

[42] $A - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A を直交行列によって対角化せよ。

(2) 曲線 $5x^2 + 2xy + 5y^2 = 1$ の概形を描け。

(3) t の関数 $x = x(t), y = y(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{cases} x' = & -7x & + & y \\ y' = & -2x & - & 5y \end{cases}$$

を初期条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ のもとで解け。

標準問題　-物理-

目 次

第1章

はじめに

物理標準問題集を作成するにあたって、以下の点に留意した。

(1) 教育プロジェクト中間報告書にあるモジュールごとのシラバス例に対応して、力学、熱、波動、電磁気、電子と原子核の 5 つの単元に分け、各単元のはじめにはシラバス例に記載の、学習目標・学習到達目標を載せておいた。各問題は、実際に高専の定期試験で使用された問題を中心に、学習到達度を評価するのに適当と思われる問題を選んだ。比較的難問と思われるものには、∗[12] のように問題番号に＊印をつけておいた。本問題は、定期試験時であれば、(計算ミスを考慮して) 各分野 8 割以上は解けることが望ましい。また、この問題集を作るにあたり、参考文献に挙げる教科書・問題集等を参考にさせていただいた。

(2) 問題番号が [∗12] のようになっているものは、専門（科目）において登場する低学年の物理の問題を専門（科目）の教官から出していただいたものである。本プロジェクトの第 3 テーマである、一般（科目）と専門（科目）の融合と協力体制の確立という意味でも、これには意義があると考えられる。

電場と電界のように、学会によって専門用語が異なるものがある。低学年（物理）から、専門（科目）に移行するに当たり、用語が異なることで学生の混乱を招くこともあるようである。以下に、専門（科目）の教官から指摘していただいた用語をまとめておく。

物理	専門
電場	電界
静電気力	静電力
磁場	磁界
電気量	電荷量
電気容量	静電容量
コンデンサー	コンデンサ、キャパシタ

(3) 補足には、高専物理・物理実験の基本的事項である、有効数字、平均値・平均二乗誤差や次元解析についてまとめた。

第 2 章

力学

この章では、日常に起こる物体の運動や様々なエネルギーの現象を観察、実験の解析等を通して探求し、それらの基本的な概念や法則を理解し、運動とエネルギーについての見方や考え方を身に付ける。

到達目標

- **物体の運動**（速さと速度、加速度、落下運動、速度の合成と分解、水平投げと斜め投げ上げ）：速度、加速度の概念を理解し、等速直線運動、等加速度直線運動に関する計算が出来る。また、速度の合成分解ができ、平面内での落下運動に関する計算が出来る。
- **力と運動の法則**（力、大きさのある物体に働く力のつりあい、運動の 3 法則、摩擦力）：重力、弾性力などの、物体に働く基本的な力を理解し、つりあいに関する計算が出来る。運動の 3 法則を理解し、直線運動に関する運動方程式を立てることが出来る。また、モーメントを理解し、剛体のつりあいに関する基本的な計算が出来る。
- **運動量の保存**（運動量と力積、運動量の保存、はねかえり係数）：運動量と力積を理解し、運動量保存則、はねかえり係数を用いた計算が出来る。
- **仕事と力学的エネルギー**（仕事、運動エネルギー、位置エネルギー、力学的エネルギーの保存）：仕事の計算が出来る。運動エネルギー、重力弾性力による位置エネルギーを理解し、力学的エネルギー保存則を用いた計算が出来る。
- **運動とエネルギー**（等速円運動、慣性力、遠心力、万有引力、単振動）：円運動、単振動、万有引力による物体の運動など力の向きが一定でない物体の運動について、それらの規則性を理解し、計算できる。

2.1 物体の運動

[1] 片道 10[km] の道を往復するとき次の問いに答えよ。

(1) 行きの時間が 50 分のとき平均の速さは何 [km/h] か。

(2) 帰りの速さが 18[km/h] のとき往復の平均の速さは何 [km/h] か。

[2] 速さ 2[m/s] で右向きに動いていた物体が 10[s] 間等加速度直線運動をし 55[m] 右に移動した。この間の加速度を求めよ。

[3] 電車がある駅から次の駅まで行くのに最初の 30[s] 間は加速度 0.8[m/s^2] で加速し、次の 100[s] 間は等速運動、最後の 20[s] 間は加速度 1.2[m/s^2] で減速した。

(1) この間の $v-t$ グラフを描け。

(2) 両駅間の距離はいくらか。

[4] 直線上を速さ 12[m/s] で左向きに動いていた物体が 10[s] 後には右向きに 4[m/s] になった。この間の加速度はどちら向きに何 [m/s^2] か。

[5] 東向きに 20[m/s] で走っていた自動車が 5[s] 後には南向きに 20[m/s] で走っていた．この間の自動車の平均の加速度の 向き と 大きさ を求めよ．

[6] 高さ 39.2[m] の橋の上から鉛直上向きに 9.8[m/s] で小石を投げた。

(1) 小石は橋の上何 [m] まで上がるか?

(2) 小石が川面に落下する時刻を求めよ。

[7] 高さ 44.1[m] のビルの屋上から水平に 39.2[m/s] で投げられた物体について次の問いに答えよ．

(1) 地面に落下する時刻を求めよ．

(2) 落下地点はビルから何 [m] の距離か？

(3) 落下の瞬間の速度の 水平成分，鉛直成分 および 速度の大きさ を求めよ．

[8] 水平なグランドで、図 1-1 のように、一点 O から小さなボールを水平面との角度 θ の方向に、速さ v_0 で投げ上げた。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。

(1) 投げられてから最高の高さ H に達するまでの時間を求めよ。

(2) 水平到達距離を L とすると、$H = k \tan\theta \cdot L$ と表すことができる。係数 k を求めよ。

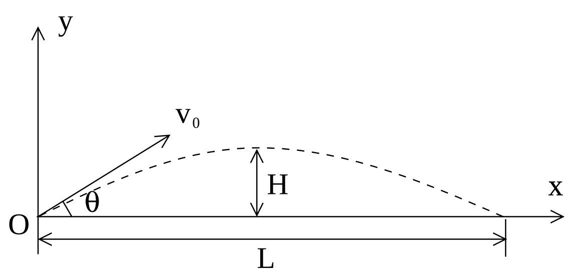


Figure 2.1: 図 1-1

[9] 地面から小石を仰角 30° の方向に、$19.6m$ の速度で投げた。地面に落下するまでの時間は何秒か。また、水平到達距離は何 m か。

2.2 力と運動の法則

[1] 1[kgw] は何 [N] か。

[2] 天井からつるしたばねに、質量 $1.0kg$ のおもりをつるしたら、$0.10m$ 伸びた。ばね定数は何 kgw/m か。

[3] 質量 $5.0kg$ の物体が $9.8m/s^2$ の加速度で落下している。この物体に働く重力の大きさは何 N か。

[*4][浮力] 図 1-2 のような直方体を，静水中（密度 $\rho = 1000kg/m^3$）に浮かべたとき，以下の問いに答えよ．ただし，この直方体の幅は $3.0m$，奥行きは $6.0m$，高さは上層部が $3.0m$，下層部は $1.0m$ であり，密度は上層部が $rho_1 = 600kg/m^3$ であり，下層部が $rho_2 = 1200kg/m^3$ である．また，重力加速度は g を用いるものとする．

(1) 上層部の重量 W_1 を求めよ.

(2) 下層部の重量 W_2 を求めよ.

(3) 直方体が x だけ水没したとき，この直方体の物体に作用する浮力 F_b を求めよ．ただし，$1.0m <$ x $< 4.0m$ とする.

(4) x を求めよ.

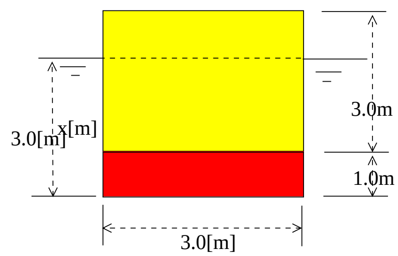


Figure 2.2: 図 1-2

[5] 天井の 2 点 A、B から重さ $4.0kg$ の物体をつり下げたら、図 1-3 のように AC、BC と鉛直方向とのなす角がそれぞれ 45°、60° となってつり合った。各糸の張力を求めよ。

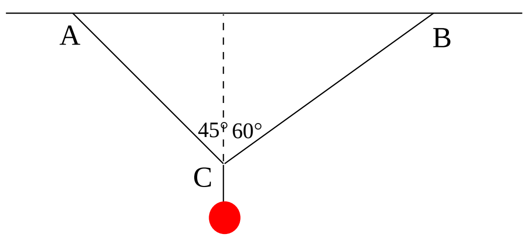


Figure 2.3: 図 1-3

[6] 質量 $2.0kg$ の小球を糸につけ、その端を天井に結ぶ。この小球にばね定数 $15kgw/m$ のつるまきばねをつけ、他端を水平に静かに引く。糸が鉛直線と 60° の角をなしてつりあっているとき、つるまきばねの自然の長さからの伸びは何 m か。

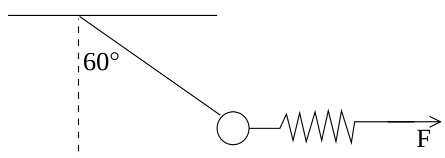


Figure 2.4: 図 1-4

[7] 重りの上下に 2 本の糸をつけ上の糸を天井に結び吊るした。下の糸を急に引くと切れるのは上下どちらの糸か、理由をつけて答えよ。

[8] ある物体に $6.0N$ の力を加えたところ、$2.0m/s^2$ の加速度が生じた。この物体の質量は何 kg か。

[9] 質量 $4.0kg$ の物体に、$3.0N$ と $5.0N$ の力が反対向きに働くとき、この物体に生じる加速度の向きと大きさを求めよ。

[10] 質量 6[kg] の物体に 3[kgw] の力を加えたとき加速度はいくらか。

[11] 0.4[kg] の重りに軽い糸をつけて引き上げるとき以下の問いに答えよ。

(1) 重りの質量を m，糸の張力を T，重りに働く重力を mg，重りの加速度を a として運動方程式を書け。

(2) 重りが静止しているとき糸に働く張力は何 [N] か?

(3) 重りを 2[m/s^2] で引き上げるとき糸に働く張力は何 [N] か?

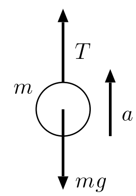


Figure 2.5: 図 1-5

[12] 図 1-6 のようになめらかな水平面上に置かれた二つの物体を力 F で押すとき次の問いに答えよ.

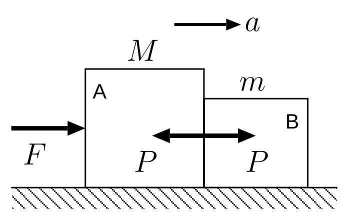


Figure 2.6: 図 1-6

(1) A,B それぞれの質量を M, m，A,B 間に働く力を P，加速度を a とする時，A,B の運動方程式を書け.

(2) A,B それぞれの質量を 5[kg], 3[kg]，押す力 F=20[N] の時加速度と A,B 間に働く力を求めよ.

[13] なめらかな水平面上に質量 $60.kg$ の物体 A と質量 $4.0kg$ の物体 B があり、糸で結ばれている。A を右向きに $50N$ の力で引く場合、A、B の加速度の大きさと糸の張力の大きさを求めよ。

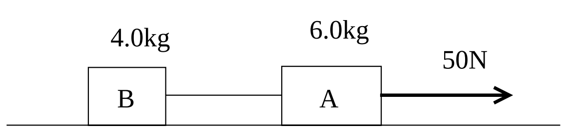


Figure 2.7: 図 1-7

[14] 静止まさつ係数が 0.6，動まさつ係数が 0.2 の水平な面上に 20[kg] の物体が静止している．この物体を水平に引く時次に問いに答えよ.

(1) 何 [kgw] で引くとこの物体はすべりだすか？

(2) 10[kgw] で引く時のまさつ力を求めよ.

(3) 15[kgw] で引く時のまさつ力を求めよ.

[15] 図 1-8 のように、水平な床上に質量 $M[kg]$ の台車を置き、台車の上に質量 $m[kg]$ の物体をのせた。物体と台車の間には摩擦があるが、車輪と床との摩擦は無視できるものとする。水平方向で右向きに $v_0[m/s]$ の初速度を与えたところ、そのうち、物体と台車の速度が等しくなった。この等しくなったときの速度を求めよ。

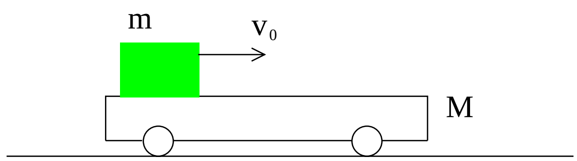


Figure 2.8: 図 1-8

[16] 傾角 30° のなめらかな斜面に質量 $6.0kg$ の物体 A と質量 $4.0kg$ の物体 B を互いに接して図 1-9 のように置き、物体 A の下方から斜面に平行に $98N$ の力で押し続けた。

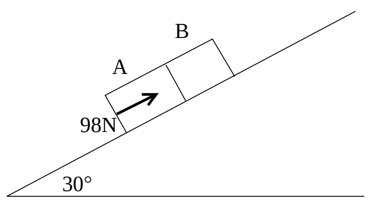


Figure 2.9: 図 1-9

(1) 物体 A、B に生じる加速度はいくらか。

(2) 物体 A が B を押し上げる力はいくらか。

[17] 図 1-10 のそれぞれの場合について、回転軸 O の周りの力のモーメントを求めよ。

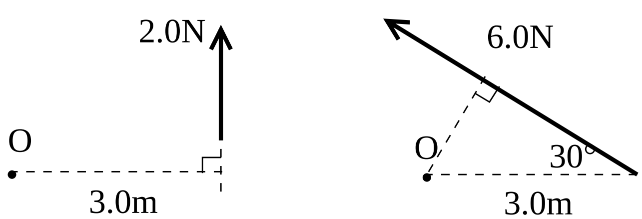


Figure 2.10: 図 1-10

[18] 図 1-11 の物体の重心を G として、x を求めよ。

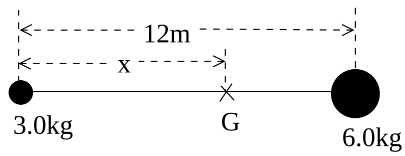


Figure 2.11: 図 1-11

[19] 図 1-12 のように一様な材質の針金を折り曲げてつくった物体 AOB の重心の位置座標を求めよ。ただし、$OA = 1.6[m]$、$OB = 3.2[m]$ とし、座標軸は図のようにとる。

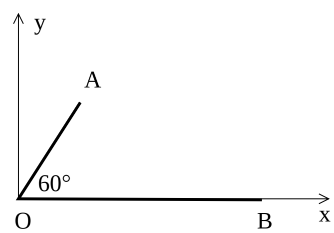


Figure 2.12: 図 1-12

[*20] 図 1-13 のように，質量 M，長さ l の一様な棒ＡＢを床と壁の間に θ の角度（壁の鉛直面から）で立てかけている．床と棒の間の静止摩擦係数を μ，壁は非常になめらかであるとき，以下の問いに答えよ．ただし，重力加速度は g を用いるものとする。

(1) 棒に着目し，棒に作用するすべての力を右図に図示せよ．

(2) θ でつりあっているとして，水平方向と鉛直方向の力およびモーメントのつりあい式を示せ．

(3) 棒がすべらないためには，θ はどのような範囲の値とすればよいか．

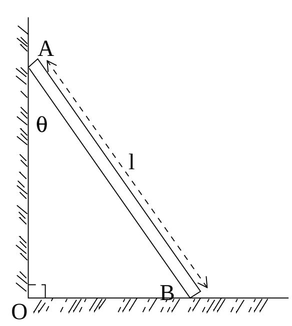


Figure 2.13: 図 1-13

[*21] 図 1-14 のように，たくさんの力を受ける長方形板 OABC がつりあっている。このとき，以下の問いに答えよ．ただし，G は長方形板の図心である。

(1) x 方向（正とする）の力のつりあい式を示し，P_2 を求めよ。

(2) y 方向（正とする）の力のつりあい式を示せ。

(3) 点 O に関するモーメントのつりあい式を示し，P_3 を求めよ。

(4) 点 O に作用する P_1 を求めよ。

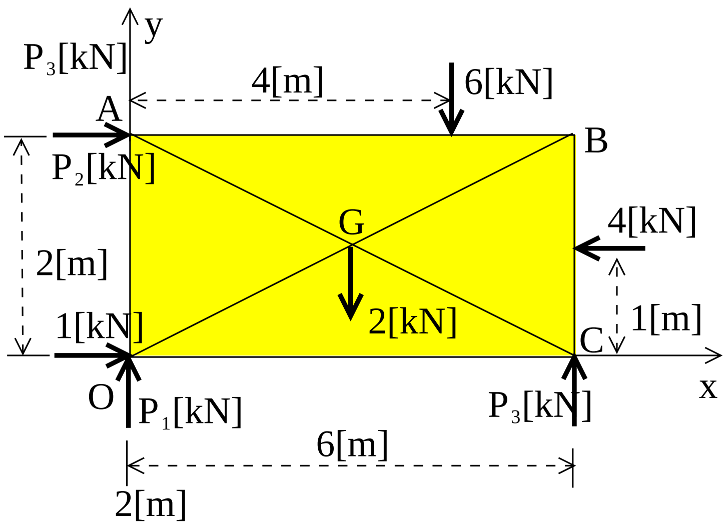


Figure 2.14: 図 1-14

2.3 運動量の保存

[1] 質量 3[kg] の物体が速度 4[m/s] で動いているときの運動量の大きさを求めよ.

[2] 100[N] の力で 5[s] 間押すときの力積の大きさを求めよ.

[3]$3.0m/s$ の速さで走っている質量 $2.0kg$ の台車に、速度と同じ向きに力を加えたところ、$4.0m/s$ の速さになった。台車の運動量変化はいくらか。また、台車が受けた力積の大きさはいくらか。

[4] 静止していた質量 $0.10kg$ のボールに $20N$ の力を $0.20s$ 間加えた。ボールの運動量の大きさと、速さはそれぞれいくらになったか。

[5] 速さ 15[m/s] で壁に垂直にぶつかった物体が 9[m/s] で跳ね返ったとき, はね返り係数はいくらか.

[6] 静止していた物体が、爆発して質量 $3.0kg$ の破片 A と質量 $2.0kg$ の破片 B に分裂した。A が東向きに $12m/s$ で飛び出したとすると、B はどちら向きにいくらの速さで飛び出したか。

[7] 東向きに 3[m/s] の速度の貨車 A が前方を 2[m/s] で走っている貨車 B に追い付いて連結した．A，B それぞれの質量が 1000[kg],4000[kg] であるなら連結後の速さはいくらか.

[8] 一直線上を同じ向きに動く、質量の等しい物体 A,B がある。$4.0m/s$ の速さで動く物体 A が、$2.0m/s$ の速さで動く物体 B に追突した。衝突後の A の速さを $2.5m/s$ とすると、B の速さはいくらになったか。

[9] 平面上を、原点 O に向かって物体 A が飛んできて、原点 O で B、C の 2 つに分裂した。B は質量 $3.0kg$ で、$10m/s$ の速さで y 軸の正の向きに飛び、C は質量 $2.0kg$ で、$20m/s$ の速さで x 軸の正の向きに飛んだ。物体 A の速さと、図 1-14 の角 θ の正接 (tan) を求めよ。

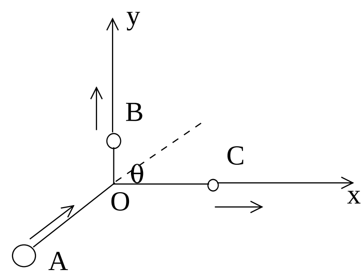


Figure 2.15: 図 1-15

[10] 同じ質量 $0.1kg$ で大きさの等しい二つの小球 P と Q がある。図のように、傾斜角 $30°$ の滑らかな斜面上の点 A から、初速度 0 で球 P が滑り始めると同時に、A から 2.0m 離れた点 B において、球 Q を初速度 v_0 で斜面に沿って投げ上げたところ、Q の速さが 0 になる瞬間に P と衝突した。重力加速度を $9.8m/s^2$ として以下の問いに答えよ。

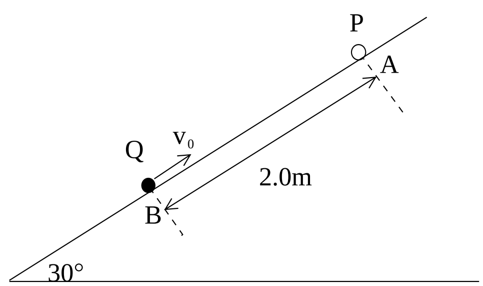


Figure 2.16: 図 1-16

(1) 球 P が Q に衝突するまでの時間を求めよ。

(2) 球 P が Q に衝突する時の P の速さを求めよ。

(3) 衝突を完全弾性衝突として、衝突直後の両球の速さを求めよ。

2.4 仕事と力学的エネルギー

[1] 質量 3[kg] の物体が速度 4[m/s] で動いているときの運動エネルギーを求めよ.

[2] 100[N] の力で 5[m] 押すときの仕事を求めよ.

[3] 40[J] の仕事を 5[s] で行う時の仕事率を求めよ.

[4] $2.0 \times 10^5 N$ の力で、列車を $40m/s$ の速さで引っ張っている機関車がある。この機関車の仕事率を求めよ。

[5] 高さ 10[m] にある質量 3[kg] の物体の重力による位置エネルギーはいくらか.

[6] バネ定数 200[N/m] のバネを 0.2[m] 伸ばしたときの弾性力による位置エネルギーを求めよ.

[7] 高さ 20[m] のビルの屋上から速さ 7[m/s] で上向きに投げられた物体が地面に落下する速さを力学的エネルギー保存則より求めよ.

[8] 速さ 20[m/s] で走っている質量 500[kg] の自動車がブレーキをかけ 10[m/s] に減速した．この間にブレーキのまさつ力がした仕事を求めよ．

[9] 長さ 4[m] の板を高さ 2[m] の塀に立てかけて板の上に質量 2[kg] の物体を置いた．

(1) この物体が静止しているとき物体に働く 垂直抗力 と 静止摩擦力 を求めよ．

(2) この物体を板に沿って 1[m] 引き上げるとき重力がする仕事を求めよ．

[10] 図 1-17 のような滑らかな曲面上を、質量 $2kg$ の物体が A の位置から自然に滑り落ちた。以下の問いに答えよ。

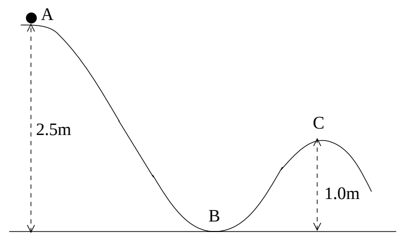


Figure 2.17: 図 1-17

(1) B 点にきたとき、物体はどんなエネルギーをどれだけ持っているか。

(2) 更にすべり続けて、C 点を通るときの速さはいくらか。

[11] 長さ $40cm$ の糸の先 A に $0.5kg$ の球をつけ、定点 O からつるす。このとき、以下の問いに答えよ。

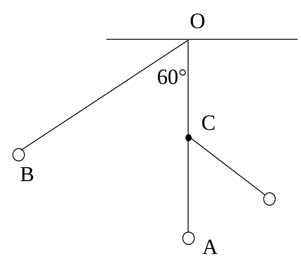


Figure 2.18: 図 1-18

(1) B の位置から球を放すと、最下点での球の速さはいくらか。

(2) このとき、糸 OA の中点 C をおさえると、球は右方でどれだけの高さまであがるか。

2.5 運動とエネルギー

[1] ハンマー投げを考えよう．ワイヤーの長さは 1.2[m]，おもりは 7[kg] としよう．体を中心からワイヤーを持つ手までの長さを 40[cm] として速さ 20[m/s] で体の中心の回りで等速円運動させ投げるものとする．このとき以下の量の値を求めよ．

(1) 角速度

(2) 周期

(3) 回転速度

(4) 加速度

(5) 遠心力

[2] 質量 $1.6kg$ の洗濯物を半径 $0.10m$ の脱水槽に入れて回転させた。脱水槽の壁が受ける遠心力が $400N$ の時、角速度は何 rad/s か。

[3] 地上で体重を量ると 56[kgw] の人が上昇中のエレベータの中で体重を量ると 64[kgw] であった．エレベータの加速度はいくらか.

[4] 質量 20 万トンのタンカーの甲板に体重 80[kg] の人が立っている．タンカーの重心と人間の距離が 20[m] であるとき人がタンカーから受ける万有引力の大きさを求めよ．万有引力定数は $6.67 \times 10^{-11}[\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2]$ とせよ．

[5] 地球上の物体は、地球の自転によって等速円運動を行っている。赤道上にある質量 $50kg$ の物体に作用する向心力の大きさは何 N か。ただし、地球の半径を $6.4 \times 10^3 km$、自転周期を 24 時間とする。

[6] 図 1-19 のようなジェットコースターが、鉛直面内の円形軌道で宙返りが出来るようにしたい。円軌道の半径を $r[m]$、重力加速度を $g[m/s^2]$ として以下の問いに答えよ。

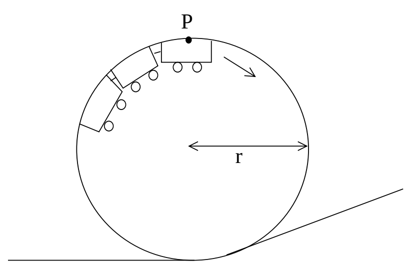


Figure 2.19: 図 1-19

(1) 円周の頂点 P で落下しないためには、重力と遠心力との間にはどのような関係が成り立つ必要があるか。

(2) (1) から、P 点での速さ v は何 m/s より大きくなければならないか。

[7] バネ定数 100[N/m] のバネに 0.25[kg] のおもりを吊したバネ振り子が上下に振動している．最下点から最高点までの間隔は 0.2[m] であった．このバネ振り子の振幅、角振動数、周期、振動中心での速さをそれぞれ求めよ．

[8] ばね定数 $200N/m$ のばねに、質量 $0.72kg$ のおもりをつけたばね振り子がある。このばね振り子の周期は何秒か。

[9] 長さ $2.45m$ の単振り子の周期は何秒か。ただし、重力加速度を $9.8m/s^2$ とする。

[10] ある星の地表で長さ 1[m] の単振り子を振らしたところ周期が 4[s] であった．この星の重力加速度を求めよ．

[11] 図 1-20 のように傾き θ のなめらかな斜面の上端にばねの一端を結び、他端に質量 m のおもりを結んで手を離したら、ばねは l だけ伸びてつり合った。このばねはフックの法則に従うものとし、重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

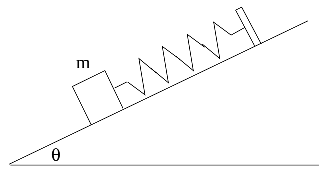


Figure 2.20: 図 1-20

(1) このばねのばね定数 (k) を求めよ。

(2) おもりを下に引いて手を放すとき、つりあいの位置からの伸びが x の位置でおもりの持つ加速度を a とする。この位置におけるおもりの運動方程式をたてよ。

(3) (2) に基づいて、おもりは単振動をすることを示し、その周期を求めよ。

(4) おもりがつりあいの位置を通過するときの速さを求めよ。

第3章

熱

この章では、様々な熱現象を探求し、基本的な概念と法則を理解する。
到達目標

- **熱と気体の法則**（熱と温度、気体の法則、気体の内部エネルギー、エネルギーの変換と効率）：熱、熱平衡などの基本的な概念を理解し、比熱、熱容量、熱量などの基本的な計算が出来る。また、内部エネルギーと、熱も含めたエネルギー保存の法則を理解する。
- *__気体の分子運動__（気体の分子運動と圧力温度、気体の内部エネルギー）：原子分子を構成要素と見たとき、そのミクロな運動によって１）の性質等が決まることを理解し、気体分子運動の基本的な計算が出来るようになる。
- *__気体の状態変化__（熱力学第 1 法則、定積変化、定圧変化、定温変化、断熱変化、熱機関と熱効率）：熱力学第 1 法則について理解し、それぞれの状態変化についての基本的な計算が出来る。

3.1 熱と気体の法則

[1] 華氏温度は水の氷点を 32[°F]、沸点を 212[°F] となるように決められている。摂氏 25[°C] は華氏何度か？

[2] 水のモル比熱は何 [J/mol·K] か。

[3] 水銀 500g の熱容量はいくらか。ただし、水銀の比熱を $0.14 J/g \cdot K$ とする。

[4] 比熱 $0.46 J/g \cdot K$ の鉄 100g を温度 $200°C$ 上げるのに必要な熱量を求めよ。

[5] $60°C$、1kg の湯に、$10°C$ の水を加えて全体の温度を $40°C$ にしたい。何 kg の水を加えればよいか。

[6]10[°C] の水 0.2[ℓ] の中に 90[°C] に温めた鉄 100[g] を入れると全体の温度はいくらになるか。鉄の比熱は 0.11[cal/g°C]，熱は外に逃げないものとして答えよ。

[7] 質量 300g の鉄球を $100°C$ に熱して、$16°C$ の水 250g が入った熱量計に入れたところ、水の温度が $25°C$ になった。鉄の比熱を求めよ。ただし、熱量計の容器とかき混ぜ棒の質量は合わせて 200g で、比熱 0.39 の銅で作られているとすし、水の比熱は 4.2 とする。また、この間外部との熱の出入りはなかったとする。

*[8]1[atm] の大気中でトリチェリーの実験を行うと水銀柱は 76[cm] まで上がることを学んだ。この実験を大気圧 0.8×10^5[N/m^2] の山上で行うと水銀柱の高さは何 [m] まで上がるか。

[9]1[atm] の大気中で面積 3×10^{-3}[m^2] の吸盤が支えられる力は何 [N] か。

[10] 水 1[cm^3] に着目して水分子のだいたいの大きさを見積もりなさい。(必要なら $30^{1/3} \approx 3$ を使え。)

[11] 次の諸量の単位を下の単位群の中から選んで記入せよ.

水の比熱	=	1 [ ]								
氷の融解熱	=	80 [ ]								
熱の仕事当量	=	4.2 [ ]	atm	J/gK	Nm^2	N/m^2	kg/m^3	cal/g°C	J/mol K	
大気圧 (1 気圧)	=	1.013×10^5 [ ]	cal/J	J/K	J/cal	J/g	cal/g	cal/mol	atm ℓ/mol K	
気体定数	=	8.31 [ ]								
ボルツマン定数	=	1.38×10^{-23} [ ]								

[12] あるエンジンは 200[J] の仕事をさせるために 600[J] の熱を捨てなければならないという。このエンジンの熱効率を求めよ。

3.2 ＊気体の分子運動

[1]1mol の質量が 28g の気体が 42g ある。この気体は、27°C、2.0×10^5Pa の時体積は何 m^3 を占めるか。

[2]27[°C]、1. 5×10^5[Pa] の単原子分子理想気体 2×10^{-4}[m^3] について以下の問いに答えよ。

(1) この気体のモル数を求めよ.

(2) この気体の内部エネルギーはいくらか。

[3] 図 2-1 のように一辺の長さが L の立方体の容器 (体積 $L^3 = V$) 中に質量 m の分子が N 個入っており、これらの分子は内壁と弾性衝突をするものとする。この時、以下に従って気体分子の運動エネルギーの平均値を求めてみよう。

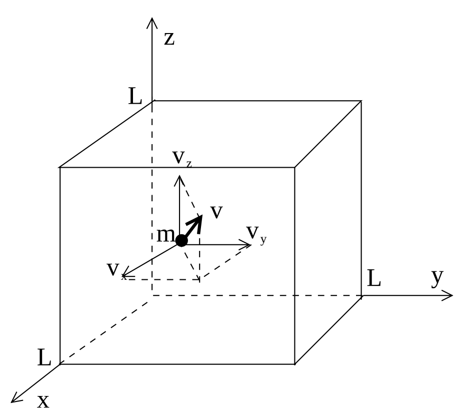


Figure 3.1: 図 2-1

(1) 立方体中の 1 個の分子の速度を v とし、v の成分をそれぞれ v_x、v_y、v_z とする。1 回の衝突で分子が x 軸に垂直な内壁に及ぼす力積を求めよ。

(2) (1) の分子が 1 秒間に、x 軸に垂直な内壁と衝突する回数を求め、この壁に 1 秒間に及ぼす力積を求めよ。

(3) すべての分子についての v_x^2 の平均値を $\bar{v}_x^2$ として、容器中の全分子がこの壁に及ぼす力積を求めよ。

(4) 分子数はきわめて多いから、運動はどの方向にも一様と考えてよい。このことから、$\bar{v}_x^2$ をすべての分子についての速度の 2 乗 v^2 の平均値、$\bar{v}^2$ を使って表せ。

(5) 以上から、気体の圧力 p を N、m、$\bar{v}^2$ 及び体積 V を使って表せ。

(6) 今、理想気体の状態方程式 $pV = \frac{N}{N_A}RT(N_A$ はアボガドロ数、R は気体定数) と比較することにより、気体分子の運動エネルギーの平均値を R、T、N_A を用いて表せ。

[4] 温度とは何か？分子に着目して説明せよ。

[5] 温度 400[K] において気体分子 1 個の持つ平均の運動エネルギーを求めよ。

3.3 ＊気体の状態変化

[1] ある気体に 400[cal] の熱を加えると 400[J] の仕事をした。この気体の内部エネルギーはいくら増加したか？

[2]$20°C$ の単原子分子の理想気体 10mol を滑らかに動くピストンで容器に閉じ込め、1040J の熱を与えると、気体が膨張して温度が $25°C$ になった。この気体がされた仕事を求めよ。

[3] 単原子分子の理想気体の定積モル比熱を求めよ。

[4] 単原子分子の理想気体の定圧モル比熱を求めよ。

[5] 圧力 1.5×10^5Pa の気体が、圧力を一定に保ちながら、体積が $2.0 \times 10{-}3m^3$ 膨張した。このとき、気体がした仕事を求めよ。

[6] 図 2-2 に示される [1],[2],[3] の状態変化は等温変化、定圧変化、定積変化のどれにあたるか答えよ。

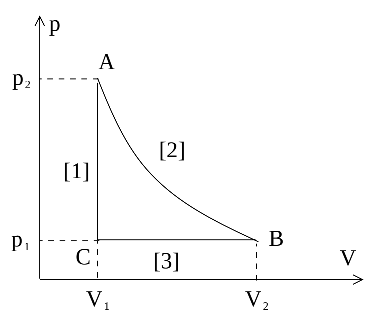


Figure 3.2: 図 2-2

[7]$27°C$、1.0 気圧、$1.0l$ の気体を断熱圧縮して体積を $0.10l$ にした。圧縮された後の気体の温度と圧力を求めよ。ただし、$T \times V^{0.7} =$ 一定、$10^{0.7} = 5.0$ とする。

第4章

波動

この章では、地震波、水波、光、音などいろいろな波について共通の性質を観察、実験などを通して探求し、波動現象についての基本的な概念や法則を理解する。

到達目標

- **波の性質**（波の表し方、波の重ね合わせ、定常波と反射波の位相、波の伝わり方）：波長、振動数、伝わる速さなど、波を表す基本的な量を理解し、各項目の基本的な計算が出来るようになる。
- **音波**（音の速さと3要素、反射屈折回折干渉、共振共鳴、ドップラー効果）：音が伝わるには、空気などの媒質が必要であることを理解し、各項目に関する基本的な計算が出来るようになる。
- **光波**（光の進み方、レンズ、波としての光、光の回折干渉）：光が横波であることを理解し、屈折などの基本的な計算ができる。また、レンズ、回折、干渉の初歩的な計算が出来るようになる。

4.1 波の性質

[1] 波長 $3.0m$、振動数 $2.5Hz$ の波の伝わる速さはいくらか。

[2] 波長 $0.50m$、速さ $340m/s$ の波の振動数はいくらか。

[3] 振動数 $2.5Hz$ の波の周期はいくらか。

[4] 図3-1は、ある時刻で右向きに進む縦波を、横波表示したものである。密な点はどこか。また、速さが最大のところはどこか。

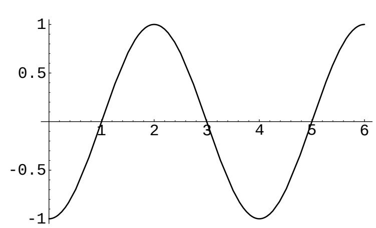


Figure 4.1: 図3-1

[5] 時刻 $t[s]$、位置 $x[m]$ における媒質の変位 $y[m]$ が $y = 3\sin 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4})$ で表される正弦波の伝わる速さはいくらか。

[6] 変位 $y[m]$ と時間 $t[s]$ の関係が $y = 0.1\sin \pi t$ で表される振動の振幅、周期、振動数を求めよ。

[7] 振幅 $2.0m$、波長 $5.0m$、周期 $8.0s$ の正弦波が x 軸上を正の向きに進んでいる。この波を表す式を、変位 $y[m]$、位置 $x[m]$、時刻 $t[s]$ として表せ。

[8]$y = 0.4\cos 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{5})$ で表される波において、時刻 $t = 0$ の波形を表すグラフ ($y - x$ グラフ) を描け。

[9] 図 3-2 のような実線の波が、最初に点線のような波形になるのに 1.0 秒かかった。このとき、以下の問いに答えよ。(実線の波形となった時刻を $t = 0$ にとる。)

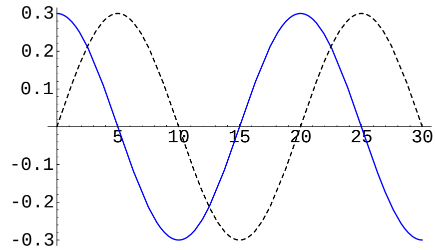


Figure 4.2: 図 3-2

(1) この波の振幅、波長、速さ、周期、振動数を求めよ。

(2) 実線の状態から、初めて原点が谷になるのは、何秒後か。

(3) 原点 $x = 0$ の時刻 $t[s]$ における変位 $y[m]$ をグラフと式で表せ。

(4) 任意の点 $x[m]$ の、時刻 $t[s]$ における変位 $y[m]$ を表す式を求めよ。

(5) $t = 10[s]$、$x = 95[m]$ の変位 $y[m]$ を求めよ。

[10] 互いに逆向きに進む波形の同じ波が合成すると、定常波が出来る。図 3-3 の実線の波は右向きに、点線の波は左向きに進む進行波を表している。このとき出来る定常波の節はどこか。

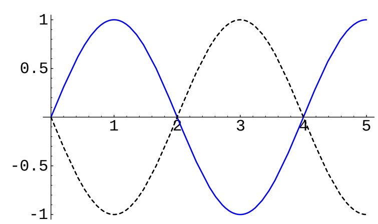


Figure 4.3: 図 3-3

[11] 水面上の 2 点 A、B を波源として、同位相で波長 $2.0m$ の球面波が出ている。$AP = 30m$、$BP = 13m$ であるような点 P では、波は強めあうか、弱めあうか？

[12] 図 3-4 のような 2 つの三角波 (1 辺 4 の正三角形) が 1 秒間に 2 目盛り進むものとして、3.0 秒後の波の様子を作図せよ。

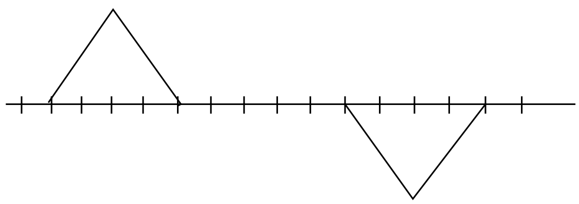


Figure 4.4: 図 3-4

[13] 次の括弧に適切な語句を入れよ。

(1) 波が進行方向の障害物の背後にまわりこんで進む現象を（ア）といい、波長が長いほどよく起こる。

(2) 横波が自由端で反射される場合、入射した山は (　　) として反射される。従って、入射波と反射波の位相差は (　　)$[rad]$ である。

(3) 波が異なる媒質に進むとき、波の速さと（イ）は変化するが、（ウ）は変化しない。そして（エ）の比がその媒質へ波が進むときの屈折率である。

[14] 次の現象のうち、反射ともっとも関係が深いものはどれか。

(1) 室内では話し声がよく聞こえるが、戸外では聞こえにくい。

(2) 塀や建物の裏側の見えないところからでた音でもよく聞こえる

(3) 晴れている日、遠方の鐘の音は一般に昼より夜の方がよく聞こえる。

[15] 波長 4m、速さ $25m/s$ の波が媒質 I から媒質 II へ入射した。媒質 II での速さが $20m/s$ であった。このとき媒質 II での波の波長を求めよ。

[16] 媒質 I から媒質 II に向かって波が入射した。媒質 I、媒質 II での波の波長はそれぞれ $5.0m$、$4.0m$ であった。媒質 I に対する媒質 II の屈折率を求めよ。

4.2 音波

[1] 気温 $20°C$ の空気中を伝わる音の速さはいくらか。

[2] 人が聞くことの出来る音の振動数はおよそ $20Hz$ から $2.0 \times 10^4 Hz$ の範囲である。音速を $3.4 \times 10^2 m/s$ とすると、人が聞くことの出来る音の波長の範囲を求めよ。

[3] 振動数 $400Hz$ の音さと、振動数 $398Hz$ の音さを同時に鳴らすと、うなりは 10 秒間で何回聞こえるか。

[4] 長さ $0.50m$、質量 $2.0 \times 10^{-3} kg$ の弦を $40N$ の力で引っ張って両端を固定した。この弦を伝わる横波の速さはいくらか。また、基本振動数はいくらか。

[5] 長さ $0.68m$ の開管における気柱の基本振動数を求めよ。ただし、音速を $3.44 \times 10^2 m/s$ とする。

[6] 止まっている自動車が、$680Hz$ のクラクションをならした。この自動車から $10m/s$ で遠ざかる人には、いくらの振動数に聞こえるか。ただし、音速を $340m/s$ とする。

[7] 図 3-5 のように、点 O を中心とした半径 $30m$ の円周上を、$576Hz$ の音を出しながら運動している物体がある。いま、点 O から $60m$ の位置にある点 P で音を聞いたところ、音が最も高くなってから最も低くなるまでの時間は 3.14 秒であった。音速を $340m/s$ として以下の問いに答えよ。ただし、$\pi = 3.14$ とする。

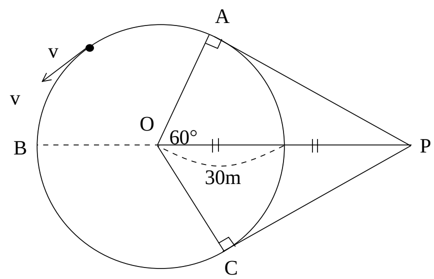


Figure 4.5: 図 3-5

(1) 物体の速さを求めよ。

(2) 最も高くなった音の振動数を求めよ。

4.3 光波

[1] 屈折率 2.4 のダイヤモンド中に、波長 $6.0 \times 10^{-7}m$ の光が入射した。この光のダイヤモンド中の波長を求めよ。

[2] 屈折率 $\sqrt{2}$ の液体が入ったビーカーの底に 1 円玉がある。図 3-6 のように、液体が、ビーカーの 10cm の高さまで入っているとき、1 円玉を真上近くから見ると、この 1 円玉の深さはいくらに見えるか。

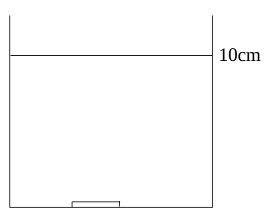


Figure 4.6: 図 3-6

[3] 焦点距離が $0.15m$ の凸レンズの左側 $0.3m$ のところにロウソクをおいた。このとき、どの位置にどのような像ができるか。

[4] 光が横波である証拠を述べよ。

[5] 図 3-7 はヤングの干渉実験を示している。D は波長を変えることが出来る単色光源で、d は L に比べて十分小さいものとする。ついたて PQ 上に観察される干渉じまについて、次の問いに答えよ。

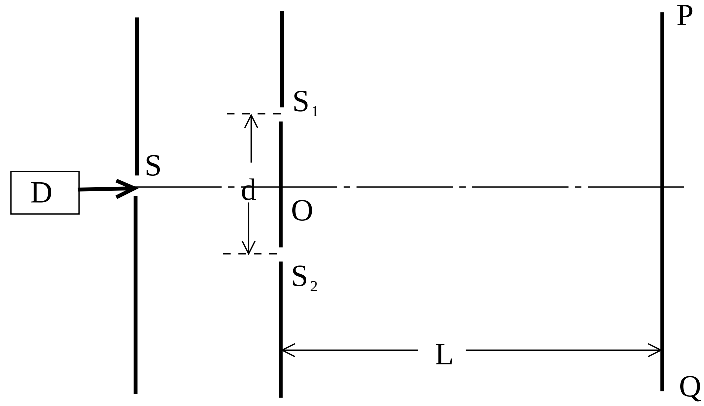


Figure 4.7: 図 3-7

(1) 隣り合う明線の間隔 Δx を L、d、光線の波長 λ で表せ。

(2) 入射光線の色を赤、緑、紫に変えたとき、それぞれの明線の間隔 Δx を大きい順に示せ。

(3) 装置全体を屈折率 n の水中に入れると、明線の間隔 Δx はどのように変化するか。

第5章

電磁気学

この章では、電気や磁気に関する現象を観察などを通して探求し、電磁気に関する基本的な概念や原理法則を系統的に理解する。

到達目標

- **電場**（静電気力、静電誘導、電場、電場中の導体）：導体中の自由電子の移動による静電誘導を定性的に説明できる。電場の概念を理解し、電気力や電場の計算ができる。
- **電位**（電位、電位差、コンデンサー）：電位、電位差の概念を理解し、計算できる。また、コンデンサーの基本的な性質を理解し、計算できる。
- **電流**（オームの法則、電気抵抗、直流回路、キルヒホッフの法則、電流と仕事）：オームの法則、キルヒホッフの法則を理解し、直流回路に関する計算が出来る。
- **電流と磁場**（磁場、電流の作る磁場、電流が磁場から受ける力、ローレンツ力）：直線電流や円電流などが作る磁場と磁場から受ける力に関する計算が出来る。また、荷電粒子が磁場から受ける力、ローレンツ力に関する計算が出来る。
- **電磁誘導と電磁場**（電磁誘導の法則、相互誘導、自己誘導、交流、電磁波）：コイルと導線に生じる誘導起電力について基本的な性質を理解し、計算できる。交流と電磁波の性質を定性的に理解する。

5.1 電場

以下の問いに答えよ（各5点）ただしクーロン力の比例定数を $9.0 \times 10^9 [N \cdot m^2/C^2]$ とする。

[1][帯電] 同じ大きさの導体球 A,B がある。A には $4.0 \times 10^{-8} C$、B には $-2.0 \times 10^{-8} C$ の電荷があるとき、A と B を接触させてから離すと、A の電荷はいくらになるか。

[2][はく検電器] 正に帯電しているガラス棒を用いて、はく検電器に正と負の電荷を帯電させる方法を述べよ。

[3][静電気力] エボナイト棒を毛皮でこすったら、エボナイト棒に $-4.8 \times 10^{-8} C$ の電荷が生じた。毛皮からエボナイト棒へ移動した電子は何個か。ただし、電子1個が持つ電荷を $-1.6 \times 10^{-19} C$ とする。

[4][静電誘導] 電荷をもたない導体に帯電体を近づけると、導体が引き寄せられるのはなぜか。説明せよ。

[5][クーロンの法則] 真空中で $100m$ 隔てて $+1.0C$ と $-2.0C$ の電荷がある。その間に働く静電気力の大きさはいくらか。また、それは引力か反発力か。

[6][電場] A 点に、$2.0 \times 10^{-8}C$ の正電荷を置いたところ、電荷は、大きさが $8.0 \times 10^{-5}N$ で右向きの力を受けた。A 点の電場の強さと向きを求めよ。

[7][電場] $2.0 \times 10^{-8}C$ の点電荷から $3.0m$ 離れた点の電場の強さはいくらか。

[8][電場の合成] $1.0 \times 10^{-6}C$ 及び、$2.0 \times 10^{-6}C$ の正に帯電した 2 つの小球が、$a[m]$ 離れた 2 点 A、B に置かれている。電場が 0 の点が線分 AB 上にあるという。その点の位置を求めよ。

[*9][電場の合成] 一直線上に距離 $a[m]$ をへだてて $q_1[C]$、$q_2[C]$、$q_3[C]$ の 3 つの電荷がある。

(1) それぞれの電荷に働く力を求めなさい。

(2) 電荷に働く力が平衡にあるためには q_1、q_2、q_3 をどのように選べばよいか。

[*10][電場の合成]

$Q_1 = 1\mu C$ が点 $P_1 = (1,1,3)$ に、$Q_2 = 3\mu C$ が点 $P_2 = (3,1,1)$ に、$Q_3 = 2\mu C$ が点 $P_3 = (1,1,1)$ にある。ここで位置 $P_0 = (2,2,2)$ に電荷 $Q_0 = 1\mu C$ を持ってきた。電荷 Q_0 に働く力のベクトルを求めなさい。

[11][静電気力] 質量 $m[kg]$ の小さな金属球 A をおもりとした単振り子に電荷 $q_1[C](q_1 < 0)$ を与え、これに $q_2[C](q_2 > 0)$ の電荷をもつ小金属球 B を図 4-1 のような位置に持ってくると、A、B は水平線上で $r[m]$ の距離を隔てて静止した。このとき A は鉛直線から θ だけ傾いていた。重力加速度を $g[m/s^2]$、クーロン力の比例定数を $k[N \cdot m^2/C^2]$ として次の問いに答えよ。

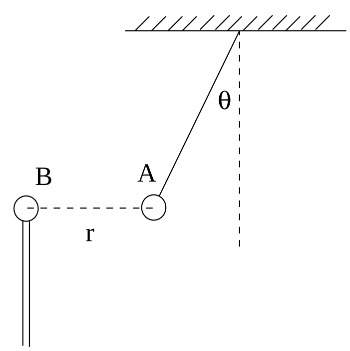


Figure 5.1: 図 4-1

(1) A、B 間の静電気力を $f[N]$ として、$\tan\theta$ を f、m、g で表せ。

(2) $m = 5.0 \times 10^{-3}[kg]$、$q_1 = -7.0 \times 10^{-7}[C]$、$r = 0.20[m]$ 、$k = 9.0 \times 10^9[N \cdot m^2/C^2]$、$\theta = 20°$、$g = 9.8[m/s^2]$ として、$q_2[C]$ を求めよ。ただし、$\tan 20° = 0.36$ とする。

*[12][ガウスの法則] 半径 $R[m]$ の導体球に $Q[C]$ の電荷がたくわえられている。このとき、以下の問いに答えよ。ただしクーロン力の比例定数を $k[N \cdot m^2/C^2]$ とする。

(1) 導体の (静) 電気的性質を 3 つ挙げよ。また、これをもとに図中に電気力線を書き込め。

(2) 電場の強さが E の点では、$\vec{E}$ に垂直な単位面積あたり E[本] の電気力線を描くものとすると、$Q[C]$ の電荷から出る電気力線の総数は $4\pi kQ$[本] となることが示せる。これを利用して、球の中心から $r[m]$ の点の電場の強さ $E[N/C]$ を $r < R$、$r > R$ それぞれの場合で求めよ。

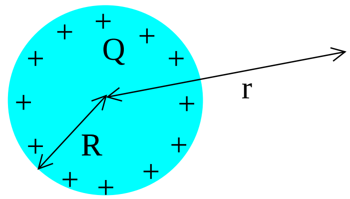


Figure 5.2: 図 4-2

5.2　電位

[1][電位] $2.0 \times 10^{-4}C$ の正電荷を A 点から B 点へ移動させたとき、外力が $6.0J$ の仕事をした。A、B どちらが何 V 電位が高いか。

[2][電位差] $2.0V/m$ の一様な電場にそって、$3.0m$ 離れた 2 点間の電位差はいくらか。

[3][等電位面] 雷雲が現れた時に、高い木の付近に非難すると危険である。また、自動車の中に非難すると安全である。これらの理由を説明せよ。

[4][エネルギー保存] 一様な電場に沿って、$0.50m$ 離れた 2 点 A,B がある。A の電位は B より $2.0 \times 10^{2}V$ 高い。このとき以下の問いに答えよ。

(1) AB 間の電場の向きと強さを答えよ。

(2) A 点に $2.5 \times 10^{-12}C$ の正電荷を帯びた質量 $1.0 \times 10^{-15}kg$ の粒子を置くとき、この粒子が電場から受ける力の大きさはいくらか。

(3) この粒子が A から B に達するまでに電場が粒子にした仕事はいくらか。

(4) この粒子の初速度を $0m/s$ とすると、B に達したときの粒子の速度はいくらか。

[5][エネルギー保存] ブラウン管の平行板電極が $2.0cm$ 離れている。この電極に $200V$ の電圧をかけると、電場の大きさはいくらか。また、この極板の間に電子を置くと、電子が受ける力の大きさはいくらか。ただし、電気素量を $1.6 \times 10^{-19}C$ とする。

[6][コンデンサー] $40\mu F$ のコンデンサーの両端に $50V$ の電源をつないで充電すると、極板に貯えられる電気量はいくらか。

[7][コンデンサー] $1.0\mu F$、$2.0\mu F$、$3.0\mu F$ の平行平板コンデンサーがある。これら 3 個のコンデンサーを直列に接続して両端に 44V の電圧をかける。このとき、各コンデンサーに貯えられる電気量と、極板間の電圧を求めよ。

[8][電気容量] 平行平板コンデンサーの極板面積を 3 倍にし、極板距離を 0.2 倍にして極板間を比誘電率 1.5 の誘電体で満たしたコンデンサーの容量は、もとの極板間が真空であったコンデンサーの容量の何倍になるか。

[*9][静電容量] 半径 $a[m]$ の導体球の静電容量を求めなさい。

[*10][静電容量] 面積 $S[m^2]$ の平行平板導体 A,B が間隔 $d[m]$ をあけて置かれている。この平板導体 A、B 間の静電容量を求めなさい。面積 S に比べて間隔 d は十分に狭く、電極の端における電界のゆがみは無視できるものとする。

[*11][静電容量] 半径 $a[m]$ の 2 本の無限に長い導体が、中心間隔 $d[m]$ で平行に置かれている。単位長さあたりの静電容量を求めなさい。ここで、a ¡¡ d とする

[*12][静電容量] 内径および外径の半径がそれぞれ $a[m]$ および $b[m]$ の同心 2 円筒よりなる円筒状コンデンサの単位長さあたりの静電容量を求めなさい。

[13][コンデンサーの回路] 図 4-3 のような回路で、まずスイッチ S_1 を閉じ、充分時間が経過した後、スイッチ S_1 を開いてからスイッチ S_2 を閉じた。このときコンデンサー C_2 に貯えられる電気量はいくらか。ただし、$V = 60V$、$C_1 = 2.0\mu F$、$c_2 = 3.0\mu F$、$C_3 = 5.0\mu F$ で、3 つのコンデンサーには始め電荷が貯えられていなかったとする。

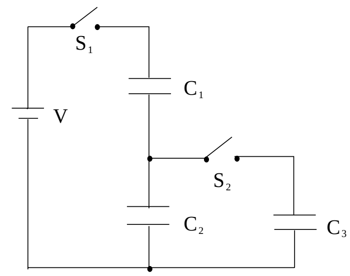


Figure 5.3: 図 4-3

[14][コンデンサーのエネルギー] 電気容量 $4.0\mu F$ のコンデンサーに $50V$ の電圧をかけて充電した場合、コンデンサーにたくわえられるエネルギーを求めよ。

5.3 電流

[1][電流] 抵抗に $0.20A$ の電流が 5.0 秒間流れた。この時、抵抗を通過した電気量はいくらか。

[*2][電流] 2 秒間に 8A の電流が流れた。電子 1 個の電荷量を $1.6 \times 10^{-19}C$ とすると，何個の電子が移動したことに相当するか。

[3][抵抗] 断面積 $2.0 \times 10^{-6}m^2$、長さ $30m$ の導線がある。この導線の抵抗はいくらか。ただし導線の抵抗率を $1.6 \times 10^{-8}\Omega \cdot m$ とする。

[4][抵抗] JIS 規格に定められている電気用銅導線の直径 $2.00mm$、$20°C$ における長さ $1.00km$ の抵抗値は 5.543Ω である。この導線の抵抗率はいくらか。

[5][抵抗] 上の問いで、$20°C$ とあるが、温度によって抵抗値が変わるのはなぜか説明せよ。

[6][抵抗の接続] 2.0Ω の抵抗と 3.0Ω の抵抗を直列につないだときの合成抵抗はいくらか。また、並列につないだときの合成抵抗はいくらか。

[7][電力] 2.0Ω の抵抗に $3.0A$ の電流を流したとき、抵抗で消費される電力はいくらか。

[8][電力] 8.0Ω の抵抗線に $2.0A$ の電流を流したとき、抵抗線が消費する電力と 5 分間に消費するエネルギーはいくらか。

[*9][電力] 100V，100W の電熱器を 90V で使用した。電熱器が消費した電力を求めよ。

[10][電気伝導の電子模型] 導線に電圧をかけると、導線中に電場が生じる。導線中の自由電子はこの電場から電気力を受け、全体として導線中の電場とは逆向きに一定の速さ v で移動して行く。つまり導線には電流が流れることになる。

今、図 4-4 のように長さ l、断面積 S の導線の両端に電圧 V をかけたところ、導線に電流 I が流れたとする。電子の電荷を $-e$、電子数密度を n として以下の問いに答えよ。

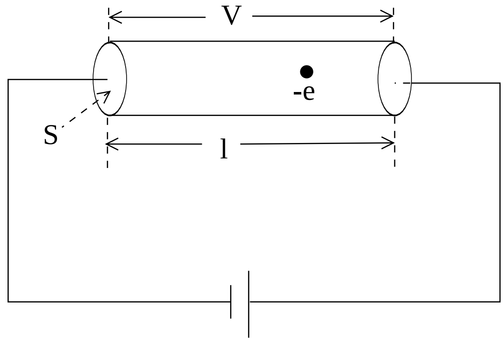


Figure 5.4: 図 4-4

(1) 電流 I を電子の速さ v の関数として表せ。

(2) 自由電子は、電場からの力と、正イオンとの衝突による抵抗力 kv（k は定数）を受けながら、一定の速さ v で移動することから、v を e、V、k、l を用いて表せ。

(3) (1)、(2) を V について解け。また、この結果から、電圧 V と電流 I にはどんな関係があるといえるか。

[11][キルヒホッフの法則] 図 4-5 の回路で、$E_1 = 16V$、$E_2 = 4.0V$、$R_1 = 20\Omega$、$R_2 = 10\Omega$、$R_3 = 20\Omega$ で電池の内部抵抗は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

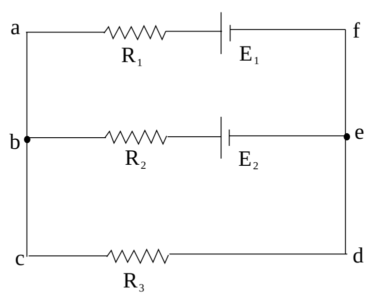


Figure 5.5: 図 4-5

(1) キルヒホッフの法則を利用して、各抵抗を流れる電流に対する連立方程式をたてよ。

(2) (1) の方程式を解いて、各抵抗に流れる電流の向きと大きさを求めよ。

[*12][電気回路] 図 4-6 の回路について、電流 I_1、I_2 を求めよ。

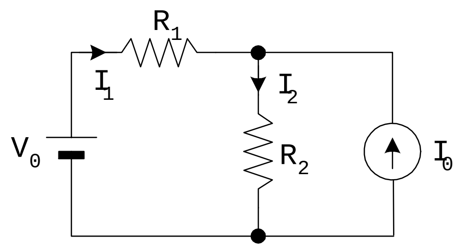


Figure 5.6: 図 4-7

[*13][電気回路] 図 4-7 の回路にて負荷抵抗 R が消費する電力を求めなさい。

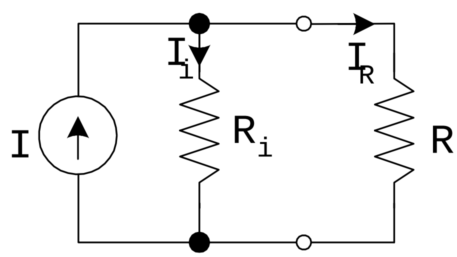


Figure 5.7: 図 4-7

[*14][電気回路] 図 4-8 の回路における各抵抗に流れる電流 I_1、I_2、I_3 を求めなさい。

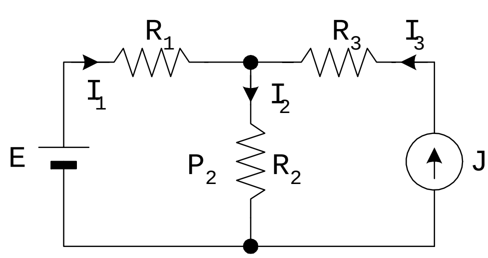


Figure 5.8: 図 4-8

[*15][電気回路] 図 4-9 の回路 (a)，(b) の合成抵抗 R を求めなさい。

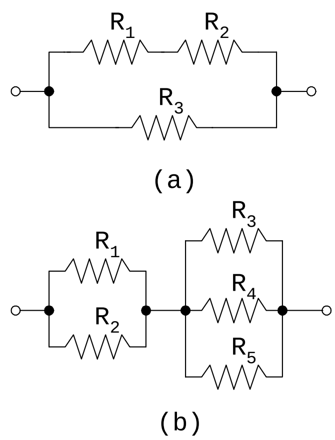


Figure 5.9: 図 4-9

[*16][電気回路] 図 4-10 の回路において抵抗 R_2 にて消費される電力 P_2 を求めなさい。

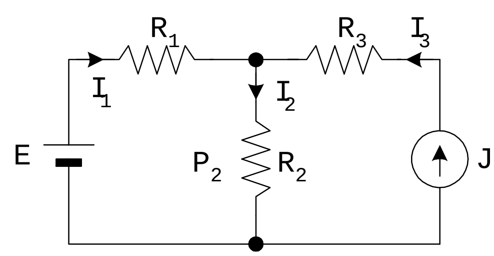


Figure 5.10: 図 4-10

5.4 電流と磁場

[1][磁性体] 塩化カリウム、コバルト、アルミニウム、グラファイト、ニッケルのうち強磁性体であるものを全て選べ。

[2][磁性体] 外見上区別できない 2 本の鉄棒がある。1 本は磁石で他方はただの鉄棒である。磁針のような余分なものを一切使わないで識別するにはどうすればよいか。

*[3][磁性体] 磁化している状態の強磁性体を加熱していくと、次第に磁気を示さなくなる。この現象をミクロな視点から説明せよ。

[4][電流と磁場] $5.0A$ の長い直線電流から $20cm$ 離れた点の磁場の強さはいくらか。

[5][電流と磁場] 長さ $25cm$ のプラスチックの円筒に一様にエナメル線を 2000 回巻いて作られたコイルの中心部の磁場の大きさはいくらか。ただし、コイルに流れている電流の大きさは $3.0A$ とする。

[6][磁場が電流に及ぼす力] 磁束密度 $2.0Wb/m^2$ の一様な磁場に垂直に置かれた導線に $3.0A$ の電流が流れている。この導線の長さ $2.0m$ あたりが磁場から受ける力の大きさはいくらか。

[7][ローレンツ力] 磁束密度 $4.0 \times 10^{-4}Wb/m^2$ の一様な磁場中に、$5.0 \times 10^5 m/s$ で磁場に垂直に入射した電子（電荷 $-1.6 \times 10^{-19}C$）が磁場から受ける力の大きさを求めよ。

5.5 電磁誘導と電磁場

[1][磁束] 断面積 $2.5 \times 10^{-2}m^2$ のコイルが磁束密度 $5.0T$ の磁場と垂直に置いてある。このコイルを貫く磁束はいくらか。

[2][ファラデーの法則] 断面積 $S = 1.0 \times 10^{-2}m^2$、　巻き数 $n = 2.0 \times 10^3$ のコイルがある。このコイルを貫く磁場の磁束密度が 0.20 秒間に一様に $5.0T$ 増加した。コイルに生じる誘導起電力の大きさはいくらか。

[3][誘導起電力] 磁束密度 $20T$ の磁場に直交して置いた長さ $1.0m$ の金属棒を、磁場と棒の両方に垂直な向きに $8.0m/s$ の速さで動かした。このとき、棒の両端間に生じる誘導起電力の大きさはいくらか。

[4][相互誘導] 相互インダクタンスが $2.0 \times 10^{-2}H$ のコイル 1、2 を一直線上に接近させて配置した。コイル 1 に流れる電流が $0.20s$ の間に一定の割合で $2.0A$ 増加した。コイル 2 に発生する誘導起電力の大きさは何 V か。

[5][自己誘導] 図 4-11 のような回路でスイッチ S を入れたとき、回路に流れる電流はすぐには V_0/R にならないで、右のグラフのように徐々に増加する。これはなぜか説明せよ。

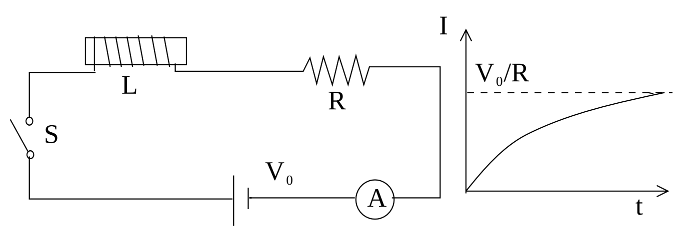


Figure 5.11: 図 4-11

[6][自己誘導] 自己インダクタンスが $0.25H$ のコイルを流れる電流が、$1.0 \times 10^{-2}s$ 間に一定の割合で $6.0A$ から $2.0A$ に減ったとき、コイルに生じる自己誘導起電力の大きさはいくらか。

[7][コイルに貯えられるエネルギー] 自己インダクタンス $100mH$ のコイルに $5.0J$ のエネルギーを蓄えるには、電流の大きさをいくらにすればよいか。

[8][交流] 直流に対する、交流の利点を挙げよ。

[9][交流]$60Hz$ の交流の角周波数と周期を求めよ。

[10][交流] 実効値が $100V$ の交流電圧の最大値は何 V か。

[11][交流] 実効値が $100V$ の交流電圧を 20Ω の抵抗につないだ。このとき、回路に流れる電流の最大値を求めよ。

[12][交流] 発電所から $2.5 \times 10^5 kW$ の電力を送るのに抵抗 20Ω の送電線をもちいた。送電電圧を $5.0 \times 10^5 V$ にすると、送電線を流れる電流の大きさはいくらか。また、送電線で失われる電力はいくらか。

[13][交流とコイル] 自己インダクタンスが $0.2H$ のコイルの、$60Hz$ の交流に対する誘導リアクタンスを求めよ。

[14][交流とコンデンサー] 交流電源に平行平板コンデンサーがつながれている。今コンデンサーの極板間隔を 2 倍にすると、回路に流れる電流の実効値は始めに比べて何倍になるか。

[15][電気振動] インダクタンスが $8mH$ のコイルと、電気容量が $0.2\mu F$ のコンデンサーを直列に接続した回路の固有周波数を求めよ。

*[16][電磁波]20 世紀始めに長岡半太郎、ラザフォードらによって、原子模型が提案された。これによると、水素原子は重い原子核 (陽子) を中心として、その周りを (静電気力を向心力として) 電子が回っている。しかし、電磁気学が正しいとすると、電子は直ちに陽子に吸い込まれて、原子はつぶれてしまう。なぜか説明せよ。

第6章

電子と原子核

この章では、現代物理学の基礎であるミクロな世界の現象を探求し、量子的な考えなど基本的な概念や原理・法則を理解する。

到達目標

- **波動性と粒子性**（電子の性質、光の粒子性、電子の波動性）：光や電子の波動性や粒子性などの量子的考えを理解する。電子の比電荷、光電効果等の基本的な計算が出来る。
- **原子の構造と原子模型**（原子の構造、原子核、放射線、核エネルギー）：原子にも構造があることを理解し、ボーア模型等の基本的な計算が出来る。放射線、核エネルギーなどの定性的な理解をする。
- **素粒子**（基本粒子、自然の階層性）：陽子や中性子がさらに基本的な粒子から構成されていることを理解し、素粒子と宇宙の始まりの関係について定性的に理解する。

6.1 波動性と粒子性

[1][陰極線] 陰極線の正体はなにか。

[2] 極板間隔が $0.01m$ の平行平板コンデンサーに $50V$ の電圧をかけた。このとき、極板間にいる電子が電場から受ける力と、それにより生じる加速度を求めよ。ただし、電子の質量は $9.1\times10^{-31}kg$、電荷は $1.6\times10^{-19}C$ とする。

[3] 電子が $50V$ の電圧で加速されたときの運動エネルギーの増加量は、何 eV か。またそれは何 J か。

[4][トムソンの実験] 図 5-1 のように、真空容器に間隔 d[m]、長さ l[m] の平行極板間に電圧 V[V] をかけ、一様な電場 $E = Vd[V/m]$ をつくり、x 方向へ初速度 v_0 の電子 (質量 m、電荷 $-e$) を入射した。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 極板の他端での電子の速度成分 v_x、v_y を求めよ。

(2) (1) より、図中の角度 θ の正接 $\tan\theta$ を求め、これを e/m について解け。

(3) ここで、2 つの極板間に磁束密度 $B[T]$ の一様な磁場を紙面に垂直に裏から表向きに加えたところ、電子は直進した。このときの電子の初速度 V_0 を、E、B を用いて表せ。

(4) (2)、(3) より、e/m を d、l、V、B、θ を用いて表せ。

[5][電子の比電荷] ミリカンの実験で、油滴に付着した電荷の測定値が $10^{-19}C$ を単位として、12.87、11.27、6.45、4.84 であった。測定値は電気素量 e の整数倍であると仮定した e の値を求めよ。

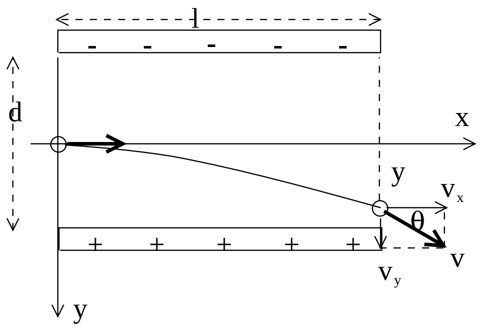


Figure 6.1: 図 5-1

*[6] われわれが、何時間ストーブに当たっても日焼けすることはないが、高山や海岸の日なたにものの 5 分もさらされると、直ちに日焼けが起こる。なぜか。

[7][光の 2 重性] 光の波動性からよく説明できる現象と、光の粒子性からよく説明できる現象を 1 つずつあげ、それについて簡単に説明せよ。

[7][光電効果] セシウム (Cs) に光電効果が起こる限界波長は $5.9 \times 10^{-7} m$ である。セシウムの仕事関数は何 eV か。ただし、光速度を $3.0 \times 10^{8} m/s$、プランク定数を $6.6 \times 10^{-34} J \cdot s$ とする。

[8][光電効果] リチウム (Li) の仕事関数は $2.3eV$ である。これに、波長 4.2×10^{-7} の光をあてるとき飛び出す電子の最大速度を求めよ。

[9][X 線] 加速電圧 $50kV$ で発生させた X 線の最短波長を求めよ。

[10][ブラッグの反射] 波長 1.54×10^{-10} の X 線を岩塩の結晶に当てると、$\sin\theta = 0.27$ で、$n = 1$ に相当する強い反射を示す。このとき岩塩の格子間隔を求めよ。

[11] ナトリウム (Na) の D 線の波長は $5.9 \times 10^{-7} m$ である。この光子のエネルギーと運動量を求めよ。

[12] 次の場合のド・ブロイ波の波長を求めよ。

(1) $100V$ の電圧で加速した電子

(2) $140km/h$ で飛んでいる質量 $145g$ のボール。

[13] コンプトン効果によって何が明らかになったか、説明せよ。

6.2 原子の構造と原子模型

[1][バルマー系列] バルマーは水素原子から放出されるスペクトルの波長が $\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 2^2}$、(n=3、4、5、$\cdots$) で与えられることを見つけた。$(B = 364.56 \times 10^{-9} m)$。これを、$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n})$ と書いたとき、R を求めよ。

[2][ボーア模型] 以下の (　) の中に適当な、数字、式、または語句を入れよ。

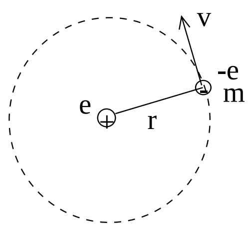


Figure 6.2: 図 5-2

水素原子の重い原子核 (電荷 $+e[C]$) を中心として、電子 (電荷 $-e[C]$、質量 $m[kg]$) が図 5-2 のように半径 $r[m]$ の円周上を速さ $v[m/s]$ で等速円運動していると仮定する。電子が受ける向心力は (ア) で、これは原子核との間の静電気力 (イ) で与えられる。ただし、クーロンの定数を $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ とする。ボーアは、電子の軌道は勝手なものが許されるのではなく、円軌道の円周が電子波の波長の整数倍の軌道のみが許されると考えた。これを、ボーアの量子条件といい、プランク定数を h、n を自然数として、$2\pi r = n\times$(ウ) と表すことが出来る。この式と、(ア)=(イ) の式とから v を消去すれば、$r =$(エ) が得られる。$n = 1$ の場合、最小の軌道半径を表し、これを**ボーア半径**という。

今、電子のエネルギー E_n は、電子の位置エネルギー $-\frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)r}$ と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ の和で与えられる。(ア)=(イ) を v^2 について解き、$\frac{1}{2}mv^2$ に代入し、E_n を m、e、h、ϵ_0、n を使って表すと、$E_n =$(オ) と書ける。n はとりうる状態を指定し、(カ) とよばれ、とびとびのエネルギーを持つ状態は (キ) とよばれる。ボーアは、電子はこの (キ) とよばれる状態にあるときは、光を放出せず、エネルギー準位が違う状態に移るときのみ、その差額に等しいエネルギーを持った光子が放出されると考えた。

[3] 電子が主量子数 $n = 3$ から、主量子数 $n = 2$ の軌道に移るとき、放出される光の振動数はいくらか。ただし、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} J \cdot s$、光速 $c = 3.0 \times 10^8 m/s$、リュードベリ定数 $R = 1.097 \times 10^7 m^{-1}$ とする。

[4][原子核] 次の原子核は、何個の陽子と何個の中性子から出来ているか。
${}^{2}_{1}H$、${}^{4}_{2}He$、${}^{14}_{6}C$、${}^{60}_{27}Co$、${}^{235}_{92}U$

[5][放射線と崩壊の種類] 次の図は、ウラン (${}^{238}_{92}U$) の崩壊の一部である。

$$ {}^{235}_{92}U \quad \xrightarrow{(\text{ア})\text{線}} \quad {}^{(\text{イ})}_{90}Th \quad \xrightarrow{\beta\text{線}} \quad {}^{(\text{ウ})}_{(\text{エ})}Pa $$

[6][半減期] 半減期が 4.5×10^9 年のウラン U が 1g ある。9.0×10^9 年後には、何 g になるか。

[7][質量欠損] 陽子の質量は $1.00728u$、中性子の質量は $1.00867u$ である。重陽子 ${}^{2}_{1}H$(質量 $2.01355u$) の質量欠損、結合エネルギーを求めよ。ただし、$1u = 1.66054 \times 10^{-27} kg$、$c = 3.00 \times 10^8 m/s$ とする。

6.3 素粒子

[1][核力] 原子核を構成する陽子と中性子をあわせて核子という。核子間には核力とよばれる強い引力が働き核子同士を結び付けている。ヘリウム原子核中の 2 つの陽子間に働く引力の大きさは少なくとも何 N 以上でなければならないか。静電気力の大きさを評価することにより求めよ。ただし、クーロンの定数を $9.0 \times 10^9 N \cdot m^2/kg^2$、電気素量を $1.6 \times 10^{-19} C$、陽子間隔を $1.0 \times 10^{-15} m$ とする。

[2] 陽子はアップクォーク (u)2 個と、ダウンクォーク (d)1 個とから構成され、中性子はアップクォーク (u)1 個と、ダウンクォーク (d)2 個とから構成されている。中性子の β 崩壊 $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ をクォークの反応式に書き直せ。

[3]π 中間子は、アップクォーク (u) と、ダウンクォーク (d) とそして、それの反クォーク $\bar{u}$、$\bar{d}$ の組み合わせからできており、ひとつのクォークとひとつの反クォークの組み合わせで結合している。π^- 中間子の電荷は、電気素量を単位として -1 である。どのクォークと反クォークの組み合わせでできているか。

*[4][対生成･対消滅] $\bar{K}^0$ 中間子は陽子 (uud) と相互作用して、Σ^+ 粒子 (uus) と π^0 中間子 (u$\bar{u}$) になる。($\bar{K}^0 + p \to \Sigma^+ + \pi^0$) $\bar{K}^0$ 中間子は何のクォークから出来ているか。

*[5] 岐阜県神岡鉱山にあるカミオカンデにおける、太陽ニュートリノ、大気ニュートリノ等に関する実験から、ニュートリノのどんな性質が明らかになったか。

第7章

補足　基本的事項

この章では、有効数字、平均値、平均二乗誤差など高専の物理実験で必要な基礎知識を確認する。また、次元解析の初歩についても修得する。

7.1　有効数字

[1] 次の数値の有効数字は何桁か。

(1) 8.25×10^3

(2) 0.0054

(3) 0.00540

[2] 次の演算を、有効数字を考慮して計算せよ。

(1) $8.52 + 16.9365$

(2) $135.68 + 29.310 - 60.5$

(3) 43.682×0.062

(4) $\frac{1329.61}{6.3\times10^3}$

(5) $2.374 \times 12.056 \times 6.12$

(6) $\frac{(7.53)^2}{3.14} + \frac{2.34}{5.6}$

(7) $\frac{10.8437}{10.8437+1.2435-10.7986}$

(8) $\frac{1.775\times980}{2.0000\times3.1416\times(1.696+1.660)} - \frac{1.696-1.660}{2.0000} \times 0.515 \times 0.9984 \times 980$

7.2　平均値・平均二乗誤差

[1] 直円柱の金属の直径と高さをノギスで測定して、次の測定値を得た（単位は全て cm）。以下の問いに答えよ。

零点	測定値 (直径)	零点	測定値 (高さ)
0.002	3.024	0.003	4.870
0.005	3.020	0.001	4.866
0.001	3.014	0.001	4.872
0.004	3.062	0.002	4.877
0.002	3.000	0.001	4.880
0.001	3.026	0.001	4.876
0.001	3.000	0.002	4.864
0.001	3.046	0.001	4.866
0.002	3.034	0.002	4.858
0.001	3.000	0.001	4.862

(1) それぞれの平均値と平均値の平均二乗誤差を計算せよ。

(2) この金属の体積を計算せよ。

7.3 次元解析

[1] 高さ $h[m]$ の橋から、質量 $m[kg]$ の錘を自由落下させるとき、水面での速さ $v[m/s]$ の関数形を次元解析の方法を用いて推測せよ。ただし、重力加速度を $g[m/s^2]$ とする。

[2] ばね定数 $k[N/m]$ のばねの一端に質量 $m[kg]$ のおもりをつけ、もう一端を天井に固定して吊り下げた。つりあいの位置から、おもりを単振動させたときの周期 $T[s]$ の関数形を次元解析の方法を用いて推測せよ。

[3] 長さ $l[m]$ の軽い糸の下端に質量 $m[kg]$ のおもりをつけ、上端を固定して鉛直面内で十分小さな振幅で振らせるときの周期 $T[s]$ の関数形を次元解析の方法を用いて推測せよ。ただし、重力加速度を $g[m/s^2]$ とする。

[4] 圧力を $P[N/m^2]$、体積を $V[m^3]$ とすると、その積 PV はエネルギーの次元を持つことを説明せよ。

[5] 浅い水面に起こる波の速度 v は、水の深さ $h[m]$ と重力加速度 $g[m/s^2]$ に関係することが分かっている。次元解析の方法を用いて、速度 v の関数形を推測せよ。

[6] 線密度が $\sigma[kg/m]$、長さ $l[m]$ 弦を、$S[N]$ の大きさの力で引っ張っているとき、弦を伝わる波の速さ $v[m/s]$ を求めたい。次元解析の方法を用いて、速さ v の関数形を推測せよ。

[7] プランク定数を $h[J \cdot s]$、光速を $c[m/s]$ とする。振動数 $\nu[Hz = s^{-1}]$ の光子が持つエネルギー $E[J]$ と、運動量 $p[kg \cdot m/s]$ を次元解析の方法を用いて求めよ。

参考文献

[1] 和達三樹 監修、小暮陽三 編集：高専の物理-第 5 版- (森北出版株式会社,2000)

[2] 田中冨士男 編著：高専の物理問題集-第 2 版-(森北出版株式会社,1986)

[3] 第一学習者編集部編：新編セミナー物理 IB ＋ II(第一学習者, 2003)

[4] 高校物理研究会・啓林館編集部編：センサー物理 IB、サンダイヤル物理の基本練習-改訂版-、ジャイロ基本問題集物理 IB-改訂版-（啓林館）